(静止している試験電荷に働くクーロン力 a3）

ある慣性系 $Oxyzt$(S 系）に対して、$x(x')$ 軸方向に一定の速度 V で運動する座標系 $O'x'y'z't'$（S' 系）を考える。ここで、真空中の光速度を c とし、$\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$ という記号を使用する。ある粒子の速度ベクトルを、S 系と S' 系において、それぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u'}$、そして同様に, 力ベクトルを $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}$ とすると、座標、時間のローレンツ変換と力の成分の変換式は次のように与えられる。$x' = \gamma(x - Vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - Vx/c^2)$

$$F_{x'} = \frac{F_x - (V/c^2)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{1 - Vu_x/c^2}, F_{y'} = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}, F_{z'} = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}. \quad (1)$$

今、試験電荷 q_2 が座標系 S の点 $(x, y, 0)$ に静止している場合。源電荷 q_1 が同じ座標系 S から見て、一定の速度 $(V, 0, 0)$ で運動していて、時刻 $t = 0$ には S 系の原点にいたとする。次の問いに答えよ。

1. S 系の時刻 $t = 0$ に対応した,S' 系における q_2 の座標と時刻を記せ。
2. S' 系において、q_1 が q_2 に及ぼすクーロン力の成分を S' 系における関係する量を用いて記せ。
3. 直前の問で求めた力の成分を S 系に変換せよ。さらに力のベクトル$\boldsymbol{F}$を記せ。

[解答例]

1. 題意より、S 系における時空座標は $q_2; (x, y, 0, 0)$ だからローレンツ変換より S' 系における時空座標は $q_2; (x', y', 0, t')$ となる。ここで $\gamma x = x', y = y', t' = -\gamma\frac{Vx}{c^2}$ である。
2. クーロン力は源電荷が静止している系（今は S' 系）で考えるのが基本だから、S' 系における座標を用いて、

$$F_{x'} = \frac{kq_1q_2x'}{(r')^3},\ F_{y'} = \frac{kq_1q_2y'}{(r')^3},\ F_{z'} = 0, (k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}). \quad (2)$$

3. 力の成分の 逆 変換式（逆変換式はベクトル成分のダッシュを交換し、$V \to -V$ と符号を変更して得られる。）において、$u_{x'} = -V$ を代入し

て、S系における力の成分は

$$F_x = \frac{F_{x'} + (V/c^2)(\boldsymbol{F'} \cdot \boldsymbol{u'})}{1 + Vu_{x'}/c^2} = \frac{F_{x'} - (V/c^2)F_{x'}V}{1 - V^2/c^2} = \gamma \frac{kq_1q_2x}{(r')^3}, \tag{3}$$

$$F_y = \frac{F_{y'}}{\gamma[1 + Vu_{x'}/c^2]} = \frac{F_{y'}}{\gamma[1 - V^2/c^2]} = \gamma \frac{kq_1q_2y}{(r')^3}, \tag{4}$$

$$F_z = \frac{F_{z'}}{\gamma[1 + Vu_{x'}/c^2]} = 0, \tag{5}$$

$$r' \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\gamma^2x^2 + y^2}. \tag{6}$$

力のベクトル $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = \frac{kq_1q_2\gamma\boldsymbol{r}}{(\gamma^2x^2 + y^2)^{3/2}},\ \boldsymbol{r} \equiv x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}. \tag{7}$$