(静止している試験電荷に働くクーロン力 a2)

ある慣性系 $Oxyzt$(S 系)に対して、$x(x')$ 軸方向に一定の速度 V で運動する座標系 $O'x'y'z't'$(S' 系)を考える。ここで、真空中の光速度を c とし、$\beta \equiv V/c,\, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$ という記号を使用する。ある粒子の速度ベクトルを、S 系と S' 系において、それぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u'}$、そして同様に, 力ベクトルを $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}$ とすると、座標、時間のローレンツ変換と力の成分の変換式は次のように与えられる。

$$x' = \gamma(x - Vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - Vx/c^2) \quad (1)$$

$$F_{x'} = \frac{F_x - (V/c^2)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{1 - Vu_x/c^2}, F_{y'} = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}, F_{z'} = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}. \quad (2)$$

今、試験電荷 q_2 が座標系 S の y 軸上の $(0, y, 0)$ に静止している場合。源電荷 q_1 が座標系 S から見て、一定の速度 $(V, 0, 0)$ で運動していて、時刻 $t = 0$ には S 系の原点にいたとする。(源電荷 q_1 から試験電荷 q_2 が垂直方向に見える瞬間を考える。) 次の問いに答えよ。

1. S 系の時刻 $t = 0$ に対応した,S' 系における q_2 の座標と時刻を記せ。
2. S' 系の時刻 $t' = 0$ において、q_1 が q_2 に及ぼすクーロン力の成分を S' 系における関係する量を用いて記せ。
3. 直前の問の結果を S 系に変換せよ。
4. 直前の問で求めた力の成分 F_y を S 系における電荷間における距離で表し、速度 V で運動する源電荷 q_1 が, その進行方向から外れて静止している試験電荷 q_2 に及ぼすクーロン力を両方とも静止している場合のクーロン力と比較せよ。

[解答例]

1. 題意より、S 系における時空座標は $q_2; (0, y, 0, 0)$ だからローレンツ変換より S' 系における時空座標は $q_2; (0, y', 0, 0)$ となる。ここで $y = y'$ である。
2. クーロン力は源電荷が静止している系(今は S' 系)で考えるのが基本だから、S' 系では q_1, q_2 間の距離として、y ではなく y' を用いるべきである。したがって、

$$F_{x'} = 0,\ F_{y'} = \frac{kq_1q_2}{(y')^2},\ F_{z'} = 0, (k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}). \quad (3)$$

3. 力の成分の 逆 変換式（ベクトル成分のダッシュを交換し、$V \to -V$ と符号を変更すれば得られる。）において、$u_{x'} = -V$ を代入して、S 系における力の成分は

$$F_x = 0,\ F_y = \frac{F_{y'}}{\gamma[1 + V(-V)/c^2]} = \gamma F_{y'},\ F_z = 0 \tag{4}$$

4. $y = y'$ だから、

$$F_x = 0,\ F_y = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \frac{kq_1 q_2}{y^2},\ F_z = 0. \tag{5}$$

ゆえに、動いている源電荷 q_1 から静止している試験電荷 q_2 の方向が、源電荷の運動方向（x 軸）と直交する瞬間、試験電荷に働く力は普通のクーロン力よりも因子 $\gamma (> 1)$ だけ大きくなる。