(静止している試験電荷に働くクーロン力 a1）

ある慣性系 $Oxyzt$(S 系）に対して、$x(x')$ 軸方向に一定の速度 V で運動する座標系 $O'x'y'z't'$（S' 系）を考える。ここで、真空中の光速度を c とし、$\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$ という記号を使用する。ある粒子の速度ベクトルを、S 系と S' 系において、それぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u'}$、そして同様に, 力ベクトルを $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}$ とすると、座標、時間のローレンツ変換と力の成分の変換式は次のように与えられる。

$$x' = \gamma(x - Vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - Vx/c^2) \quad (1)$$

$$F_{x'} = \frac{F_x - (V/c^2)(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u})}{1 - Vu_x/c^2}, F_{y'} = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}, F_{z'} = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}. \quad (2)$$

今、試験電荷 q_2 が座標系 S の x 軸上の $(x, 0, 0)$ に静止して、源電荷 q_1 が同じ座標系 S から見て、一定の速度 $(V, 0, 0)$ で運動していて、時刻 $t = 0$ で S 系の原点にいたとする。次の問いに答えよ。

1. S 系の時刻 $t = 0$ に対応した,S' 系における q_1, q_2 の座標と時刻を記せ。
2. S' 系において、q_1 が q_2 に及ぼすクーロン力の成分を S' 系における関係する量を用いて記せ。
3. 前問の結果を S 系に変換せよ。
4. 速度 V で運動する源電荷 q_1 が静止している試験電荷 q_2 に及ぼすクーロン力を両方とも静止している場合のクーロン力と比較せよ。

[解答例]

1. 題意より、S 系における時空座標は $q_1; (0, 0, 0, 0), q_2; (x, 0, 0, 0)$ だから
   ローレンツ変換より S' 系における時空座標は $q_1; (0, 0, 0, 0), q_2; (x', 0, 0, t')$
   となる。ここで $x' = \gamma x, t' = -\gamma(V\,x/c^2)$ である。
2. クーロン力は源電荷が静止している系（今は S' 系）で考えるのが基本だから、S' 系では q_1, q_2 間の距離として、x ではなく x' を用いるべきである。したがって、

$$F_{x'} = \frac{kq_1q_2}{(x')^2},\ F_{y'} = 0,\ F_{z'} = 0, (k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}). \quad (3)$$

3. 力の成分の逆変換式において、$u_{x'} = -V$ を代入して、S系における力の成分は

$$F_x = \frac{F_{x'} + \frac{(-V)(F_{x'})(-V)}{c^2}}{1 + \frac{(-V)(-V)}{c^2}} = F_{x'} = \frac{kq_1q_2}{(x')^2},\ F_y = 0,\ F_z = 0, (k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon}). \tag{4}$$

4. $x' = \gamma x$ なので、

$$F_x = \frac{kq_1q_2}{\gamma^2 x^2} = [1 - (\frac{V}{c})^2]\frac{kq_1q_2}{x^2},\ F_y = 0,\ F_z = 0 \tag{5}$$

速度 V で運動する源電荷 q_1 に対して、静止している試験電荷 q_2 が前方または後方の線上にあれば、q_1 から q_2 には源電荷の運動する方向（ｘ方向）に両者が静止している場合のクーロン力に比べて $1/\gamma^2$ 倍（＜１）の力が働く。