

物質に X 線を照射して散乱させる場合、散乱 X 線の波長には、入射 X 線の波長と同じもの（トムソン散乱）だけではなく、より波長の長いものが含まれることがあり、コンプトン散乱と呼ばれている。X 線は高エネルギーの光であることを考慮して、この後者の現象を X 線の光子と自由電子の散乱として、次の手順で理解してみる。

1. X 線は高エネルギーの光だから、電子も相対論的に扱う必要がある。電子の（静止）質量を m 、速さを v 、光速を c として、電子の相対論的運動量の大きさ p 、相対論的エネルギー E を m, v, c で表わせ。
2. 前問の結果を用いて E を m, c, p で表わす関係式を求めよ。
3. 振動数 ν 、波長 λ の光子が静止していた電子と衝突して、入射方向から角度 θ の方向に散乱されて、振動数 ν' 、波長 λ' になり、電子は速さ v で角度 ϕ で散乱されたとする（反跳電子）。プランク定数を h として、運動量保存則とエネルギー保存則を記せ。
4. 前問の結果を用いて、散乱前後の波長のずれについて次の関係が成立することを示せ

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

5. $h \cong 6.63 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s}$ 、 $c \cong 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ 、 $m \cong 0.91 \times 10^{-30} \text{Kg}$ として、電子のコンプトン波長を $\text{\AA} = 10^{-10} \text{m}$ 単位で計算せよ。

(解答)

1.

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2)$$

2.

$$\begin{aligned} (mc^2)^2 + (pc)^2 &= m^2c^4 + \frac{m^2c^2v^2}{1 - (\frac{v}{c})^2} \\ &= \frac{m^2c^4(1 - \frac{v^2}{c^2}) + m^2c^2v^2}{1 - (\frac{v}{c})^2} \\ &= \frac{m^2c^4}{1 - (\frac{v}{c})^2} \\ &= E^2. \end{aligned} \quad (3)$$

3. 運動量保存則は、入射方向と垂直方向についてそれぞれ次のようになる。

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + p \cos\phi, \quad (4)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta - p \sin\phi. \quad (5)$$

エネルギー保存則は次のとおりである。

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + E. \quad (6)$$

4. 前問の結果から ϕ をまず消去すると

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 = p^2. \quad (7)$$

前前問、前問の結果から E を消去すると、

$$(pc)^2 = (h\nu - h\nu' + mc^2)^2 - m^2c^4. \quad (8)$$

以上より p を消去すると

$$\begin{aligned} (h\nu)^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta + (h\nu')^2 \\ &= (h\nu - h\nu')^2 + 2mc^2(h\nu - h\nu') \\ &\rightarrow h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) = mc^2(h\nu - h\nu') \end{aligned}$$

$\lambda = c/\nu, \lambda' = c/\nu'$ という関係も用いて

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \quad (9)$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{h}{mc} &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s}}{0.91 \times 10^{-30} \text{Kg} \times 3.0 \times 10^8 \text{m/s}} \\ &= \frac{6.626}{0.91 \times 3} \times 10^{-34+30-8} \frac{\text{joule} \cdot \text{s}}{\text{Kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} \\ &= 0.024 \text{\AA}. \end{aligned} \quad (10)$$