

(剛体棒の回転;filenema=rodrotation1.tex,2001.2.15)

長さ ℓ の一様な細い棒の一端 O を鉛直面内でつるし、その回りに自由に回転できるとする。
この棒の質量を M , 重力の加速度を g として次の問いに答えよ。

1. 点 O のまわりの慣性モーメント I を計算せよ。
2. この系の物理的状況を図示し、働く力の場所と種類をベクトルで記入せよ。
3. 鉛直線となす角が θ として回転の運動方程式を記せ。
4. 微小振動の場合の周期 T を求めよ。

(解答例)

1. 棒は一様であるから、その線密度 $\lambda = M/\ell$ となる。従って、棒の幅 dx の質量 $dm = \lambda dx = Mdx/\ell$ となる。慣性モーメントの定義より

$$I = \int_{x=0}^{x=\ell} x^2 dm = \frac{M}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{M\ell^2}{3}. \quad (1)$$

2. 重心に鉛直下向に重力 (Mg) , 軸受けに (適当な向きと大きさの) 抗力
3. 鉛直線となす角が θ として、重力は回転を抑制する向きの力のモーメントをもつので、
回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (2)$$

となる。

ここで、抗力の大きさはゼロではないが、回転軸からの距離がないので、それによる力のモーメントはゼロである。

4. 微小振動の場合, $\sin \theta \approx \theta$

$$\begin{aligned} I \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -Mg \frac{\ell}{2} \theta. \\ \rightarrow \ddot{\theta} &= - \left(\sqrt{\frac{Mg\ell}{2I}} \right)^2 \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

これは単振動の方程式と同じ形であるから、その周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\left(\sqrt{\frac{Mg\ell}{2I}} \right)} = 2\pi \sqrt{\frac{2I}{Mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}. \quad (4)$$