物理学 IA-1 小テスト(オイラーの公式、単振動の一般解)　2003．10.10、14

（1）オイラーの公式を用いて、 $e^{i\pi/6}$ を計算せよ。根号を用いてよい。
（2）ばね定数 k 、質量 m の粒子による単振動の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

の一般解を $x = e^{\lambda t}$ とおいて求めよ。ただし、λは未定定数である。

[解]

（1）オイラーの公式　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて

$$e^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

（2）(微分方程式としての)運動方程式を解きやすくするために、次の定数(角振動数)ω ω_0 を定義すると、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

元の方程式は次のように書きなおせる。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

題意より一般解を $x = e^{\lambda t}$ とおいて

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

これより、$\lambda = \pm i\omega_0$ と決まる。したがって、一般解は

$$x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} = (c_1 + c_2)\cos(\omega_0 t) + i(c_1 - c_2)\sin(\omega_0 t)$$

と求まる。ここで c_1, c_2 は積分定数である。