

多粒子に外部から働く重力について次の問いに答えよ。

1. この重力の、重心のまわりのモーメントはゼロ、すなわち重心を支えられた物体は重力により回転し始めることはないことを示せ。
2. この多粒子系に働く重力の、座標原点のまわりのモーメントは、全質量が重心に集中した場合に働く重力の原点まわりのモーメントに等しいことを示せ。

(解答例)

1. この系の i 番目の粒子の、座標原点からの質量を m_i , 位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$, 重心の位置ベクトルを $\mathbf{R}$, 重力の作用する向きを z 軸と逆向きとし、重力加速度の大きさを g とする。 i 番目の粒子の、重心からの位置ベクトルは $\mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ であるから、重力の重心のまわりのモーメント N' は

$$\begin{aligned} N' &= \left(\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i g \mathbf{k} \right) = g \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{k} - g \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{R} \times \mathbf{k} \\ &= Mg \mathbf{R} \times \mathbf{k} - Mg \mathbf{R} \times \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、上の式を導くのに $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{R}$, $\sum_i m_i = M$ という関係を用いた。したがって、重心を支えられた物体は重力によりまわり始めることはない。

2. この多粒子系に働く重力の座標原点のまわりのモーメント N は、

$$N = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i g \mathbf{k}) = g \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{k} = g M \mathbf{R} \times \mathbf{k} = \mathbf{R} \times (M g \mathbf{k}). \quad (2)$$

となる。ここで、 $(M g \mathbf{k})$ は全質量 M に対する重力であるから、題意は示された。