

外力の下での単振動—強制振動— 2003 . 10.17

(以下, *印は少しむずかしい話題であるから、1 回目の学習では省いてよい。)

1)一般の外力の下における単振動

ばね定数 k 、質量 m の粒子による単振動に粒子のつりあいからの変位 x に独立な外力 $F(t)$ が働く場合、粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F(t) \quad (1)$$

となる。この方程式の一般解を求める。ここで角振動数 ω_0 を

$$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m} \quad (2)$$

と定義すると、運動方程式は次のように書きなおせる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (f(t) \equiv F(t)/m) \quad (3)$$

この式は未知関数 x の次数が両辺で異なるので、非同次 (または非斉次) という。したがって、(3)式は**非同次** 2 階微分方程式である。この**一般解** x は(3)式の右辺をゼロにした同次方程式(単振動の方程式)の**一般解** (x_0 とする) と(3)式の**特殊解** (x_1 とする) の和で与えられる。

$$x = x_0 + x_1 \quad (4)$$

なぜならば、これらの関数は、次のように、解であるからである。まず定義より

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= f(t), \end{aligned}$$

となり、さらにこれら 2 式を辺々加えると

$$(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1) + \omega_0^2 (x_0 + x_1) = f(t),$$

となり、もとの微分方程式を満たす。この中で x_0 は 2 階微分方程式の一般解であるならば、二つの積分定数をもつはずである。したがって、 $x = x_0 + x_1$ は二つの積分定数を含むという条件も満たすことになる。

同次方程式(単振動の方程式)の**一般解** x_0 は

$$x_0 = A \cos(\omega_0 t + \beta) \quad (A, \beta: \text{積分定数}) \quad (5)$$

である。(3)式の**特殊解** x_1 は外力の関数形が具体的に与えられてときに個別に考えればよい。

2) 周期的な外力の下での単振動

ここでは強さが周期的に変化する外力 $F(t) = mf_0 \cos pt$, (f_0, p : 一定) が働く場合を考える。このとき粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mf_0 \cos pt \quad (6)$$

となる。この方程式の一般解を求めるために、この方程式を次のように書きなおす。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos pt \quad (7)$$

この式は非同次 2 階微分方程式である。この一般解 x は、(7) 式の右辺をゼロにした同次方程式(単振動の方程式)の一般解 (x_0 とする) と (7) 式の特殊解 (x_1 とする) の和で与えられる。

$$x = x_0 + x_1 \quad (8)$$

同次方程式の一般解は単振動の式(5)で与えられる。一方, $\ddot{x}_1, x_1$ と $\cos pt$ が比例するべきこと、および三角関数の 2 階微分はマイナス符号がついて元の関数に戻るという性質を考えると、(7) 式の特殊解 x_1 は次のようにおける。

$$x_1 = B \cos pt \quad (B: \text{定数}) \quad (9)$$

この式を(7)式に代入すると

$$-p^2 B \cos pt + \omega_0^2 B \cos pt = f_0 \cos pt \quad (10)$$

となる。この式が任意の時刻で成立するためには、 $B = f_0 / (\omega_0^2 - p^2)$ でなければならない。

したがって、(7) 式の一般解は

$$x = x_0 + x_1 = A \cos(\omega_0 t + \beta) + \left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - p^2} \right) \cos pt \quad (11)$$

となる。ここで、(11) 式の最右辺の第一項はばねと粒子の系 (= 振動子) の固有振動 (characteristic vibration) を表す。また第二項が表わす運動を強制振動 (driven vibration) という。

3) * 共振

ここで、外力の振動数 p の値が固有振動数 ω_0 の値に近い場合には、強制振動の「振幅」

$f_0 / (\omega_0^2 - p^2)$ が増大する。しかし、 $p = \omega_0$ の場合には(10)式から定数 B を決めることがで

きない。この場合には元の方程式にもどって考える必要がある。そのため、初期条件として、 $x = 0, \dot{x} = 0$ とする。固有振動の積分定数は次のように決まる。

$$0 = A \cos \beta + \left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - p^2} \right), \quad 0 = -A \omega_0 \sin \beta$$

より

$$A = - \left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - p^2} \right), \quad \beta = 0$$

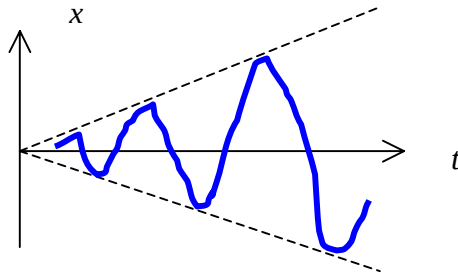
したがって、解は

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - p^2} \right) (\cos pt - \cos \omega_0 t) \\ &= \left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - p^2} \right) \cdot 2 \sin \left(\frac{\omega_0 - p}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_0 + p}{2} t \right) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで、外力の振動数 p の値が固有振動数 ω_0 の値に近づく極限を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \omega_0} x &= \lim_{p \rightarrow \omega_0} \left(\frac{f_0}{\omega_0 + p} \right) \frac{\sin \left(\frac{\omega_0 - p}{2} t \right)}{\left(\frac{\omega_0 - p}{2} t \right)} \cdot t \cdot \sin \left(\frac{\omega_0 + p}{2} t \right) \\ &= \left(\frac{f_0}{2\omega_0} \right) t \cdot \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。(13)式は外力の強さ f_0 が小さくても、固有振動と強制振動の合成された振動の振幅は時間に比例して限りなく大きくなることを意味している。このような現象を**共振** (resonance) という。地震の振動数と建物の固有振動数が近い値の場合には倒壊の可能性が高くなるなどの実例がある。



(以上の取り扱いでは、外力の振動数 p の値が固有振動数 ω_0 の値と一致する場合には、振動の振幅が無限大になるが、振幅が大きくなると、変位に比例するフックの力だけではなく、変位の2乗以上に比例する非線形力が働くので、上述の単純な取り扱いは修正が必要である。また現実には抵抗力も働くので、振幅は極大になることはあっても無限大になることはない。)

4) *外力への振動系の応答—強制振動の位相のずれ—

外力の振動数 p の値と固有振動数 ω_0 の値の大小関係に依存して、強制振動の「振幅」

$f_0/(\omega_0^2 - p^2)$ の符号が変わる。これは振幅の意味をもたせるには不都合である。そこで

強制振動の式を振幅 α と位相のずれ δ を用いて次のように書き直してみる。

$$x_1 = \alpha \cos(pt - \delta) = \alpha(\cos pt \cdot \cos \delta + \sin pt \cdot \sin \delta) \quad (12)$$

ここで(11)式と比較すると $\sin \delta = 0$ となるので、次の二つの場合が可能である。

$$\begin{cases} \omega_0 > p \text{ の場合} : \delta = 0, \alpha = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - p^2)} \\ \omega_0 < p \text{ の場合} : \delta = \pi, \alpha = \frac{f_0}{(p^2 - \omega_0^2)} \end{cases} \quad (13)$$

すなわち、いずれの場合にも振幅は

$$\alpha = \left| \frac{f_0}{(\omega_0^2 - p^2)} \right| > 0$$

と表すことができる。また、外力の振動数 p の値と固有振動数 ω_0 の値の大小関係は位相のずれ δ の値に反映されることになる。

