（一次元の衝突１）

一直線上を速度 v_1 で運動している質量 m の質点が、同じ直線上を速度 v_2 で運動している、同じ質量 m の質点に衝突する。このとき、外力が働かないとする。運動エネルギーの和が保存されるとすれば、衝突後の両質点の速度はいくらか。また、この衝突における反発係数はいくらか。ただし、衝突により質量は変化しないとする。

（解答例）

衝突後の両質点の速度をそれぞれ v_1', v_2' とする。運動量と運動エネルギーが保存されるので、

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2', \quad (1) \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (2) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、これらの式を変形すると

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \quad (3)$$

$$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \quad (4)$$

これらより

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 = 0 \quad (5)$$

であるか、（これがゼロでない場合）後の式を前の式で辺々割ると

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad (6)$$

となる。式（5）の場合には $v_1 = v_1', v_2 = v_2'$ であって、衝突前の状態をあらわす自明な解である。衝突後の速度は式（1）と（6）を連立させて解いて、

$$v_1' = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \quad (7)$$

$$v_2' = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \quad (8)$$

また、反発係数 e は

$$\begin{aligned} e &\equiv -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \\ &= -\frac{v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) - (v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2))}{v_1 - v_2} \\ &= 1. \quad (9) \end{aligned}$$