

1 1次元における2粒子の衝突(直衝突)

filename=directcollision051014.tex

1次元(x 軸方向)における2粒子の運動を考える。ある時刻 t において、それぞれ質量 m_1, m_2 , 速度 v_1, v_2 をもつ2粒子が衝突して、質量はそれぞれ保存したまま、速度が v'_1, v'_2 になったとする。ここで、衝突の際の撃力は十分大きくて、外力は無視できるとする。

このとき、2粒子系の運動量は保存されるので

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1.1)$$

一般に、 m_1, m_2, v_1, v_2 は既知であるが、 v'_1, v'_2 は未知である。運動量保存則だけでは、これらの未知量は決まらない。

このような衝突において、接近する相対速度と遠ざかる相対速度の比は2粒子の組み合わせにより一定の値をもつことが実験的に確認された(ニュートンの衝突の法則)。そこで次式で衝突係数(反発係数) e を定義する。

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \equiv -e. \quad (1.2)$$

ここで $0 \leq e \leq 1$ である。式(1.2)より、

$$v'_2 = v'_1 + e(v_1 - v_2). \quad (1.3)$$

この式を式(1.1)に代入して整理すると

$$v'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ (m_1 - em_2)v_1 + m_2(1+e)v_2 \}, \quad (1.4)$$

$$v'_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ (m_2 - em_1)v_2 + m_1(1+e)v_1 \}. \quad (1.5)$$

さらに、これらの式より

$$(v'_1 \pm v_1) = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ (m_1 - em_2)v_1 + m_2(1+e)v_2 \pm (m_1 + m_2)v_1 \}, \quad (1.6)$$

$$(v'_2 \pm v_2) = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ (m_2 - em_1)v_2 + m_1(1+e)v_1 \pm (m_1 + m_2)v_2 \}. (\text{複合同順}) \quad (1.7)$$

これらの結果を運動エネルギーの和 K に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta K &\equiv \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v^2_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v'_1 + v_1)(v'_1 - v_1) + \frac{1}{2} m_2 (v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2) \\ &= -\frac{1}{2} \mu v^2 (1 - e^2) \leq 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, (\text{換算質量}) \quad (1.9)$$

$$v \equiv (v_1 - v_2). (\text{相対速度}). \quad (1.10)$$

を得る。

ここで、反発係数の値ごとに場合わけして意味を検討する。

1. $e = 1$ の場合

(完全)弾性的と呼ばれ、運動エネルギーの和が保存される ($\Delta K = 0$)。

$$v_1' = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2 \}, \quad (1.11)$$

$$v_2' = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ (m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1 \}. \quad (1.12)$$

さらに $m_1 = m_2$ ならば、式 (1.11, 1.12) より

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1. \quad (1.13)$$

すなわち、この場合には速度が交換される。

2. $0 \leq e < 1$ の場合

非弾性的と呼ばれ、運動エネルギーの和が保存されず、一般に減少する。この際、減少したエネルギー $|\Delta K|$ は衝突の際、音、熱と光の発生などに使用されることになる。

特に、 $e = 0$ の場合には、完全非弾性的と呼ばれ、 $v_1' = v_2'$ である。

(備考：この例のように、ニュートン力学においては2粒子の散乱(または一般には反応)の際に、運動エネルギーの和は保存するか減少することはあっても増加することはない。しかし、爆発の場合には、化学反応により発生するエネルギーの一部が運動エネルギーに転化するので、運動エネルギーの和は増加する。さらに、特殊相対論においては、複合粒子系の全体の質量が減少することにより、運動エネルギーが増加することが可能である。)