

(円盤にかかるブレーキ filename=blake-qa021221.tex)

半径 R の円盤状の剛体が初め、角速度 ω_0 で回転していて、時刻 $t = 0$ で一定の大きさ F の制動力が働きはじめたとする。制動力により円盤が停止するまでに発生する熱について次の問いに答えよ。

1. この剛体の重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを I として、その後の任意の時刻 t における角速度を ω として、そのときの円盤の回転の運動方程式を記して、その解を求めよ。
2. 前問の結果を用いて、円盤の縁の速さ v と制動力のする平均的仕事率 (熱出力) P を R, F, I, t, ω_0 で表わす関係式を求めよ。
3. この円盤の発生する熱出力 $\bar{P}$ を P を R, F, ω_0 で表わす関係式を求めよ。
4. 前問の結果を、質量 $M = 1\text{tone}$ 、半径 $R = 1\text{m}$ 、制動力の大きさ $F = 100\text{N}$ 、毎分 1000 回転の場合に、計算せよ。ただし、円盤の質量を M としたときの慣性モーメントの表式 $I = MR^2/2$ を用いてよい。

(解答)

1. 回転の運動方程式は、題意より次のようになる。

$$I \frac{d\omega}{dt} = -R \cdot F. \quad (1)$$

制動力は一定だから、解は

$$\omega = -\frac{RF}{I} \cdot t + \omega_0. \quad (2)$$

2. 前問の結果を用いて、円盤の縁の速さ v は

$$\begin{aligned} v &= R \cdot \omega \\ &= R \left(-\frac{RF}{I} \cdot t + \omega_0 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

となる。また、制動力のする平均的仕事率 (熱出力) P は

$$\begin{aligned} P &= Fv \\ &= RF \left(-\frac{RF}{I} \cdot t + \omega_0 \right) \\ &= -\frac{(RF)^2}{I} t + RF\omega_0. \end{aligned} \quad (4)$$

3. この円盤が停止する ($\omega = 0$) までの時間 t_0 は

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(t) \\ &= -\frac{RF}{I} \cdot t + \omega_0 \end{aligned} \quad (5)$$

より

$$t_0 = \frac{I\omega_0}{RF}. \quad (6)$$

となる。円盤が最初の持っていた運動エネルギー ($\frac{1}{2}I\omega_0^2$) が t_0 時間にすべて熱に転化するから、発生する熱出力 (の平均) $\bar{P}$ は

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\frac{1}{2}I\omega_0^2}{t_0} \\ &= \frac{RF\omega_0}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

4.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{RF\omega_0}{2} \\ &= \frac{1\text{m} \times 100\text{N}}{2} \times \frac{1000 \times 2\pi}{60\text{s}} \\ &= 5.23\text{kW}. \end{aligned} \quad (8)$$