

2 粒子系の力学

1 1次元における2粒子系の運動方程式

1次元 (x 軸方向) における2粒子の運動を考える。ある時刻 t において、それぞれ質量 m_1, m_2 , 速度 v_{x1}, v_{x2} をもつ2粒子に外力 (external forces) $F_{x1}^{(e)}, F_{x2}^{(e)}$ が働き、内力 (相互作用力) が粒子2から1へ (F_{x12}), 粒子1から2へ (F_{x21}) が働いているとき、それぞれの粒子の運動方程式はつぎのようになる。

$$\frac{d(m_1 v_{x1})}{dt} = F_{x1}^{(e)} + F_{x12}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d(m_2 v_{x2})}{dt} = F_{x2}^{(e)} + F_{x21}. \quad (1.2)$$

(ニュートンは質量が変化する場合も含めて、運動量の時間変化率が力に等しいという形の運動方程式が成立すると主張していた。) 外力の例としては、重力または電気力または接触面における摩擦力などが考えられる。内力 (相互作用力) には運動の第三法則が成立するから、

$$F_{x12} = -F_{x21}. \quad (1.3)$$

式 (1.1) と (1.2) を辺々加えて、式 (1.3) を用いると

$$\frac{d(m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2})}{dt} = F_{x1}^{(e)} + F_{x2}^{(e)}. \quad (1.4)$$

内力は相殺することに注意する。

外力が働かない場合 (孤立系)、 $(F_{x1}^{(e)} + F_{x2}^{(e)} = 0$ または $F_{x1}^{(e)} = F_{x2}^{(e)} = 0)$ を考えると

$$m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} = \text{constant}. \quad (1.5)$$

すなわち、孤立系においては運動量の和が保存される。

2 2,3次元における2粒子系の運動方程式

2,3次元における2粒子の運動を考える。ある時刻 t において、それぞれ質量 m_1, m_2 , 速度 (ベクトル) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ をもつ2粒子に外力 (external forces) $\mathbf{F}_1^{(e)}, \mathbf{F}_2^{(e)}$ (ベクトル) が働き、内力 (相互作用力) が粒子2から1へ ($\mathbf{F}_{12}$), 粒子1から2へ ($\mathbf{F}_{21}$) (ベクトル) が働いているとき、それぞれの粒子の運動方程式 (ベクトル形) は次のようになる。

$$\frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_{12}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} = \mathbf{F}_2^{(e)} + \mathbf{F}_{21}. \quad (2.7)$$

(質量が変化する場合も含めて、運動量の時間変化率が力に等しいという形の運動方程式が成立する。) 内力 (相互作用力) には運動の第三法則が成立するから、

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.8)$$

式 (2.6) と (2.7) を辺々加えて、式 (2.8) を用いると

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)}. \quad (2.9)$$

内力は相殺することに注意する。

ここで、どのような場合に 2 粒子系の運動量が保存するかを調べる。

1. 外力が働かない場合 (孤立系)、 $(\mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)} = \mathbf{0})$ または $\mathbf{F}_1^{(e)} = \mathbf{F}_2^{(e)} = \mathbf{0}$)

この場合には

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{constant}. \quad (2.10)$$

すなわち、孤立系においては運動量のベクトル和が保存される。または x, y, z 成分で表示すると

$$m_1v_{x1} + m_2v_{x2} = \text{constant}(x), \quad (2.11)$$

$$m_1v_{y1} + m_2v_{y2} = \text{constant}(y), \quad (2.12)$$

$$m_1v_{z1} + m_2v_{z2} = \text{constant}(z). \quad (2.13)$$

孤立系においては運動量のベクトルの各成分がそれぞれの値に保存される。

2. 特定の方向 (x 軸方向とする) にだけ外力が働かない場合。

このとき

$$F_{x1}^{(e)} + F_{x2}^{(e)} = 0, \text{ または } F_{x1}^{(e)} = F_{x2}^{(e)} = 0 \quad (2.14)$$

であるから

$$m_1v_{x1} + m_2v_{x2} = \text{constant} \quad (2.15)$$

となり、運動量の和ベクトルの外力が働かない方向成分は保存される。しかし、他の成分については

$$\frac{d(m_1v_{y1} + m_2v_{y2})}{dt} = F_{y1}^{(e)} + F_{y2}^{(e)}, \quad (2.16)$$

$$\frac{d(m_1v_{z1} + m_2v_{z2})}{dt} = F_{z1}^{(e)} + F_{z2}^{(e)} \quad (2.17)$$

となり、対応する運動量の和は保存されない。このような特定の方向にだけ外力が働かない事例としては、重力は働いているが、抵抗力や摩擦力のない場所における 2 粒子系の運動が考えられる。この場合には水平方向の運動量の和は保存されるが、鉛直方向の運動量の和は保存されない。