固定点まわりの剛体の 3 次元回転

―回っている独楽はなぜ倒れないか？―

簡単のために軸対称の剛体を考える。この剛体の任意の時刻における角運動量ベクトルを $\mathbf{L}$ とする。この剛体の重心 G 位置ベクトル $\mathbf{r}$ で表される点に外力 $\mathbf{F}$ を加えて、この剛体の回転軸の向きを変化させるとする。この外力による力のモーメント $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (1)$$

と表される。任意の時刻で、角運動量の時間変化率が外力による力のモーメントが等しいので

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{N} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}\end{aligned} \qquad (2)$$

ここで、微小時間 Δt の間における角運動量ベクトルの変化 $\Delta\mathbf{L}$ は

$$\Delta\mathbf{L} \equiv \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)\Delta t = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\Delta t \qquad (3)$$

となる。外積(ベクトル積)の性質より、角運動量ベクトルの変化 $\Delta\mathbf{L}$ は外力 $\mathbf{F}$ の向きと垂直になる。したがって、地球からの重力など外力が働いても、独楽など回転する剛体は直ちにその向きに倒れることにはならない。

以上の状況を、角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ がある角速度(ベクトル) $\boldsymbol{\Omega}$ で回されると考えてみる。（この運動を才差運動(precession）という。）この角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ による角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ の時間変化率、すなわち角速度 $\Omega(=|\boldsymbol{\Omega}|)$ で、ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の向きを向く軸の周りの回転による時間変化率は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \qquad (4)$$

と表される。式(2)と(4)より、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \qquad (5)$$

が得られる。剛体の角運動量が慣性モーメント I と剛体の角速度 $\Omega(=|\boldsymbol{\Omega}|)$ により、

$$L = I\omega \qquad (6)$$

と表されることを用いると、ベクトル式（5）より、加えるべき外力の大きさＦは

$$F = \frac{\Omega I \omega}{r} \qquad (7)$$

となる。ここで、慣性モーメントＩを剛体の全質量Ｍと回転半径ｋによって表すと、

$$I = Mk^2 \qquad (8)$$

となる。（あるいは、質量Ｍで半径ｋの車輪の慣性モーメントと解釈してもよい。）
式(8)を(7)に代入すると

$$F = \frac{Mk^2 \omega \Omega}{r} \qquad (9)$$

となる。ここで、$M = 3.0 \times 10^2 \, \mathrm{kg}$, $k = 0.5 \mathrm{m}$ という剛体が角速度 $\omega = 1.0 \times 10^4 \, / \mathrm{s}$ という高速で回転している場合に、腕の長さ $r = 0.2 \mathrm{m}$ として, $\Omega = 1.0 \times 10^{-1} \, / \mathrm{s}$（1 分間で約 1 回転に相当）という比較的ゆっくりした才差運動を起こさせるために必要な力の大きさは

$$F = \frac{3.0 \times 10^2 \, \mathrm{kg} \times (0.5 \mathrm{m})^2 \times 1.0 \times 10^4 \, / \mathrm{s} \times 1.0 \times 10^{-1} \, / \mathrm{s}}{0.2 \mathrm{m}} \qquad (10)$$

$$= 3.75 \times 10^5 \, \mathrm{N} \approx 4 \times 10^4 \, \mathrm{kgw}$$

となって、車輪に働く重力の大きさ（$3 \times 10^2 \, \mathrm{kgw}$）の約 100 倍の力を必要とすることがわかる。

このように、高速で回転している物体の回転軸の向きを変えるには極めて大きい力を必要とするという事実は、物体の方向を安定させるための便利な方法として、コンパス（羅針盤)、船、飛行機や人工衛星をはじめ多くの機器に利用されている。例えば、ライフル銃と呼ばれる銃では弾丸に、発射時に旋回運動を与えて進行方向の安定化を図る。