単振動（調和振動）（１）

目次

Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)
filename=vibration(1)-summary-Moodle-100511.ppt

1. いろいろな場面（現象）における振動的運動

バネ

振り子

U字管内の水

フライホイール系

コイル・コンデンサー回路

分子における振動

原子核における振動（表面振動、巨大共鳴状態）

2. 現実的振動の理想化としての単振動

現実の振動的運動:有限の空間的領域内、
有限の時間だけ持続、
最終的には減衰し、消滅する。
複雑な挙動。

理想化

単振動:無限の空間的領域、
無限の時間持続し、減衰しない。
単純な挙動。

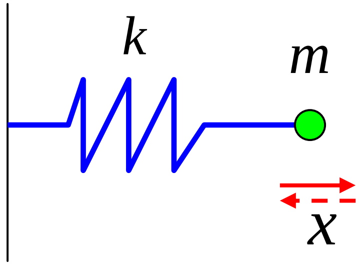
3. 単振動の特徴と基本的性質

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t + \delta')$$

振幅（amplitude） A

角振動数 ω

振動数 f



$$\omega \equiv 2\pi f \to f \equiv \frac{\omega}{2\pi}$$

周期T $x(t+T) = x(t) \to \omega T = 2\pi$

$$\to T = \frac{2\pi}{\omega}$$

4. フックの法則ー物体の位置の微小変化と安定性ー

http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Robert_Hooke

Robert Hooke (1635- 1703)　写真など興味深いHP

イギリスの物理学者、生物学者。
オックスフォード大学に学び、
ロバート・ボイルの助手となる。
フックの法則の発見。
万有引力の先取権などについて
ニュートンと論争。

(著作権を考慮して

図版を省略）

あらゆる固体は一種のバネ（の集まり）である。

Ceiiino ssstuv(暗号)→Ut tensio sic vis(ラテン語):

伸びと（回復）力は比例する

フックの論文の挿図

江沢洋、板倉聖宣「物理学入門」（国土社、1964年）

5. 単振動の微分方程式とその一般解

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad [m>0, k>0;\ x=x(t)]$$

$$x(t)=A\sin(\omega t+\delta) \quad [A,\delta: 任意定数]$$

$$=A\cos(\omega t+\delta') \quad [A,\delta': 任意定数]$$

$$=a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t) \quad [a,b: 任意定数]$$

$$=a'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+b'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad [a',b': 任意定数]$$

Aとδ(δ')の組とaとbの組（またはa'とb' の組）は相互に関係づけられる。

2階の（線形）微分方程式の一般解：二つの独立な任意定数を含む解

二つの基本解の一次結合

二つの独立な解（基本解）が x_1とx_2が求められたとする。

任意定数c_1とc_2を用いた一次結合(c_1x_1+ c_2x_2)も解である。

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=-kx_1,\ m\frac{d^2x_2}{dt^2}=-kx_2$$

$$\rightarrow m\frac{d^2(c_1x_1+c_2x_2)}{dt^2}=c_1\left(m\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)+c_2\left(m\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)$$

$$=-k(c_1x_1+c_2x_2)$$

そして二つの任意定数を含むので、一般解であるといえる。

一般解の式の間の関係（1）

$$A\cos(\omega t+\delta')=A\sin(\omega t+\delta'+\pi/2),\quad \delta'+\pi/2\equiv\delta$$

$$\begin{aligned}
&a\cdot\sin(\omega t)+b\cdot\cos(\omega t)\\
&=\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin(\omega t)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos(\omega t)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]\\
&=\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin(\omega t)\cos\delta+\cos(\omega t)\sin\delta\right]\\
&=A\sin(\omega t+\delta),\\
&A\equiv\sqrt{a^2+b^2},\\
&\cos\delta\equiv\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\delta\equiv\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\delta\equiv\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

単振動の一般解の必要条件

２階の微分方程式であるから、一般解は2つの任意定数（積分定数）をもち、微分方程式を満たさなければならない。

$$x(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega a \cdot \cos(\omega t) - \omega b \cdot \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 a \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 b \cdot \cos(\omega t)$$

$$= -\omega^2 x.$$

備考：次の形の解は任意定数を2つもつが、一般解にならないことに注意

$$x = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2, \quad (c_1, c_2 : \text{任意定数})$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -c_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t),$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -c_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$= -\omega^2 x + \omega^2 \cdot c_2$$

$$\neq -\omega^2 x$$

単振動の一般解の十分条件

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad [m>0, k>0;\ x = x(t)]$$

$$\to \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \left(\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$\to \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x\frac{dx}{dt}$$

ヒント（別紙）参照

$$\to \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = -\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\omega^2x^2\right]$$

$$\to \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega^2x^2 + C$$

$$\equiv \omega^2(B^2 - x^2),\ B^2 \equiv C$$

左辺は正かゼロの値

$$\to \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{B^2 - x^2}$$

$$\to \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} = \pm\omega dt$$

変数分離型微分方程式

ヒント

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2=\frac{d}{dx}[f(x)\cdot f(x)]=\frac{df(x)}{dx}f(x)+f(x)\frac{df(x)}{dx}=2f(x)\frac{df(x)}{dx}$$

$$\to f(x)\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[f(x)]^2$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{B^2-x^2}}=\pm\int\omega dt;$$

積分公式：$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{B^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right)+C_1,\quad [C_1:\text{定数}]$ （注１）

$$\int\omega dt=\omega t+C_2,\quad [C_2:\text{定数}]$$

$$\to\pm\sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right)=\omega t+\delta,\quad [\delta\equiv C_2-C_1:\text{任意定数}]$$

$$\to x(t)=A\sin(\omega t+\delta),\quad [A\equiv\pm B,\delta:\text{独立な任意定数}]$$

注１　積分公式 : $\int \frac{dx}{\sqrt{B^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right) + C_1$,　$[C_1:$定数$]$　の証明

$$y \equiv \sin^{-1} x \to x = \sin y$$

$$\to \frac{d\sin^{-1} x}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\to \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \sin^{-1} x.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{B^2-x^2}} = \int \frac{dx}{B\sqrt{1-(x/B)^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad [z \equiv x/B]$$

$$= \pm \sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right)$$

6. 初期条件と単振動の特殊解

単振動の運動方程式（微分方程式）の一般解には任意定数が2つ含まれている。そこで、運動方程式とは独立に、2つの初期条件を与えると、任意定数が具体的に定まり、特殊解が得られる。

時刻t＝0において、位置がx_0、速度がゼロの場合の特殊解

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

時刻t＝0において、位置が原点、速度がv_0の場合の特殊解

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

7. 等速円運動と単振動（調和振動）の関係

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$y = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\rightarrow \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x, \frac{dy^2}{dt^2} = -\omega^2 y$$

単振動 $\Leftrightarrow$ 等速円運動

古代ギリシャ人（紀元前5世紀ごろ）の概念

円形、球状天体は中心から等距離、等速円運動

調和（harmony)、秩序（order）

宇宙＝Cosmos

8. 参考：フックの法則の限界ー非線形効果ー

変位が大きくなると、変位の2乗以上の次数にも依存した力の効果（＝非線形効果、非調和効果）が無視できなくなる。

$$F(x) = -kx + bx^2 + \cdots$$

この場合には、解は解析的には表現できず、数値的な解法（非線形計算）が必要となる。

参考:「巨人の肩に乗って遠くを見渡す」

ニュートンの言葉としてしばしば引用される。しかし、

ライバルであるロバート・フックあての1676年2月5日付けの手紙に使用された。
ただし、この言葉はニュートンの独創というわけではなく、1159年にすでに
引用の形で残っているとのこと。

「巨人の肩に乗って　現代科学の気鋭、偉大なる先人を語る」
（メルヴィン・ブラッグ（Melvyn Bragg）著　熊谷千寿 訳　長谷川眞理子 解説
翔泳社　2200円　原題：On Giants' Shoulders, 1998）

アインシュタインも同じ表現を使ったことが知られている。〔カレンダー〕

『ビッグバン宇宙論　上下』（サイモン・シン著，青木薫訳，新潮社，2006年）
◆1997年にイギリスで発刊された2ポンド硬貨には，ギザギザの縁のところに
「巨人たちの肩の上に立って」という言葉が刻まれた。この言葉はニュートンが
同僚の科学者ロバート・フックに宛てた手紙から採ったもので，ニュートンはそこで
次のように書いている。「もしも私がほかの人たちよりも遠くを見たとすれば，それは
巨人たちの肩の上に立ったおかげなのです」これはニュートンが，自分のアイディア
はガリレオやピュタゴラスなど，名だたる先人たちのアイディアの上に築かれていること
を認めた謙虚な言葉のように見える。しかし実際は，これは背骨が曲がってひどく
屈んでいたフックの身体をそれとなく指し示す，悪意に満ちた表現だった。ニュートンは，
フックは肉体的に巨人ではないことを思い至らせ，知性においてもまた巨人ではない
ことをほのめかしたのである。(上 p.138）