速度と加速度ー2,3次元系ー

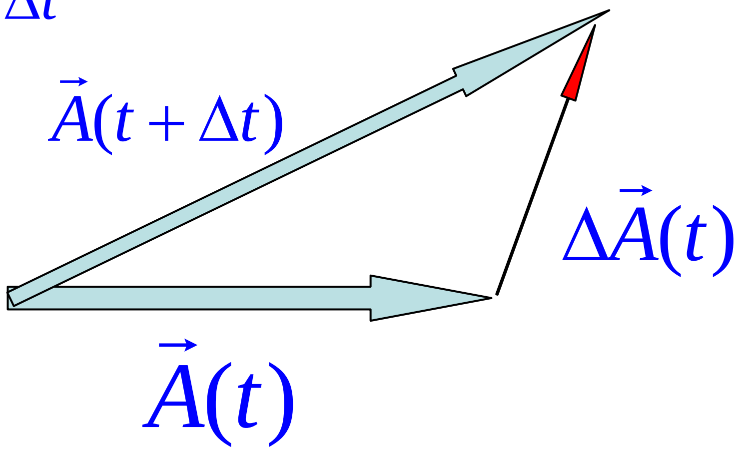
Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology),
filename=velocity-accel-23dim-summary090420.ppt

時間に依存するベクトルの微分係数(導関数)

時間に依存するベクトル $\vec{A} = \vec{A}(t)$

ベクトルの時間についての微分係数(導関数)

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t}$$



ベクトルの内積の微分

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

速度ベクトル

位置ベクトル $\vec{r} = \vec{r}(t)$

変位ベクトル $\Delta\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

velocity

速度ベクトル:位置ベクトルの時間についての微分係数(導関数):

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\vec{k} = (v_x, v_y, v_z)$$

速さ

speed

$$v \equiv \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

加速度ベクトル

加速度ベクトル：速度ベクトルの時間についての微分係数（導関数）

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\vec{k}$$

$$= (a_x, a_y, a_z)$$

加速度の大きさ

$$a \equiv \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

直交直線座標における速度・速さ、加速度

直交直線座標系をデカルト座標系ともいう。

2次元系における位置 $(x, y);\ x = x(t),\ y = y(t)$

x方向の速度 $$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}$$

y方向の速度 $$v_y \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dy(t)}{dt} \equiv \dot{y}$$

速さ(speed) $$v \equiv \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

x方向の加速度 $$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x(t)}{dt} \equiv \dot{v}_x$$

y方向の加速度 $$a_y \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv_y(t)}{dt} \equiv \dot{v}_y$$

等速円運動における位置、速度、加速度

位置 $(r,\theta): r = r(t), \theta = \theta(t)$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

中心角θラジアンの扇形の弧の長さs $s = r\theta$

円運動:半径 r 一定の運動　　角速度 $\omega \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$

等速円運動:角速度一定、速さ一定の円運動 $\theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (\theta_0 : 一定)$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d[r\cos(\omega t + \theta_0)]}{dt} = -\omega r\sin(\omega t + \theta_0),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d[r\sin(\omega t + \theta_0)]}{dt} = \quad \omega r\cos(\omega t + \theta_0),$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 y,$$

（参考）平面極座標における速度、加速度

位置ベクトル $\vec{r} = r\vec{e}_r$

$(\vec{e}_r : r$が増える向きの単位ベクトル$)$

速度ベクトル

$(\vec{e}_\vartheta : \theta$が増える向きの単位ベクトル$)$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\vartheta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt})$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad (\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt})$$

加速度ベクトル

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\vartheta$$

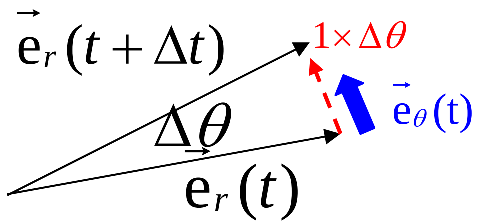
$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

平面極座標における速度、加速度の式の導出

準備：基本ベクトルの時間変化率

$$\frac{d\vec{\mathrm{e}}_r}{dt}=\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta\left(=\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{\mathrm{e}}_\theta\right),$$

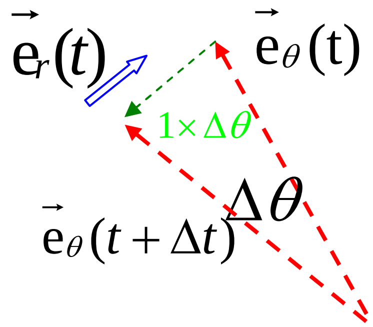


$$\frac{d\vec{\mathrm{e}}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_r$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\mathrm{e}}_r(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})-\vec{\mathrm{e}}_r(\mathrm{t})}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\frac{\vec{\mathrm{e}}_r(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})-\vec{\mathrm{e}}_r(\mathrm{t})}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\frac{1\times\vec{\mathrm{e}}_\theta(\mathrm{t})}{\Delta\theta}$$

$$=\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{\mathrm{e}}_\theta(\mathrm{t})$$

速度ベクトル



$$\vec{v}\equiv\frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r\,\vec{\mathrm{e}}_r\right)=\frac{dr}{dt}\cdot\vec{\mathrm{e}}_r+r\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm{e}}_r\right)$$

$$=\dot{r}\;\vec{\mathrm{e}}_r+r\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

加速度ベクトル

$$\vec{a}\equiv\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\;\vec{\mathrm{e}}_r+r\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta\right)=\ddot{r}\,\vec{\mathrm{e}}_r+\dot{r}\cdot\frac{d\,\vec{\mathrm{e}}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta+\dot{r}\ddot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta+\dot{r}\dot{\theta}\frac{d\,\vec{\mathrm{e}}_\theta}{dt}$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{\mathrm{e}}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+\dot{r}\ddot{\theta}\right)\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

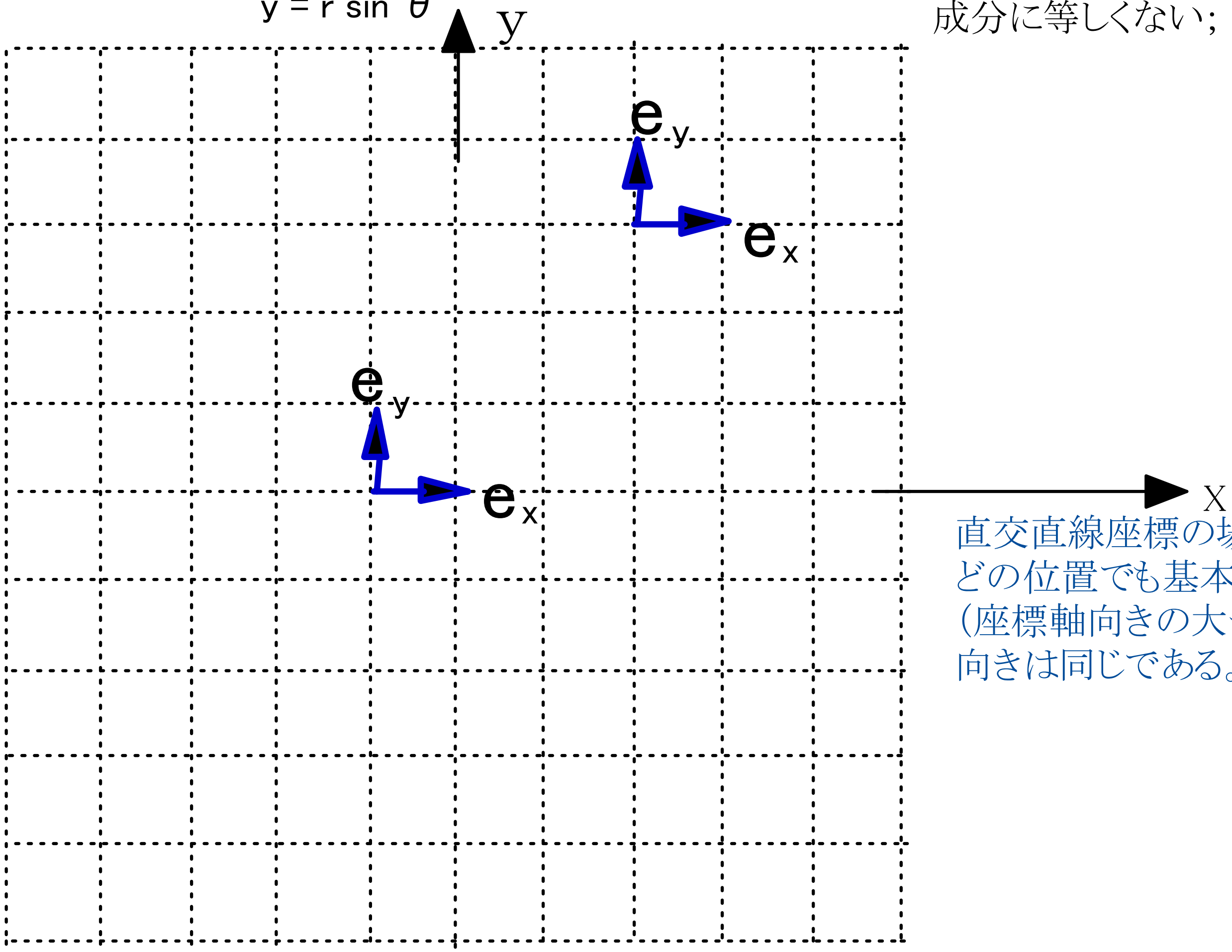
直線直交座標と基本ベクトル系

x, y ⟷ r, θ

$x = r\cos\theta$

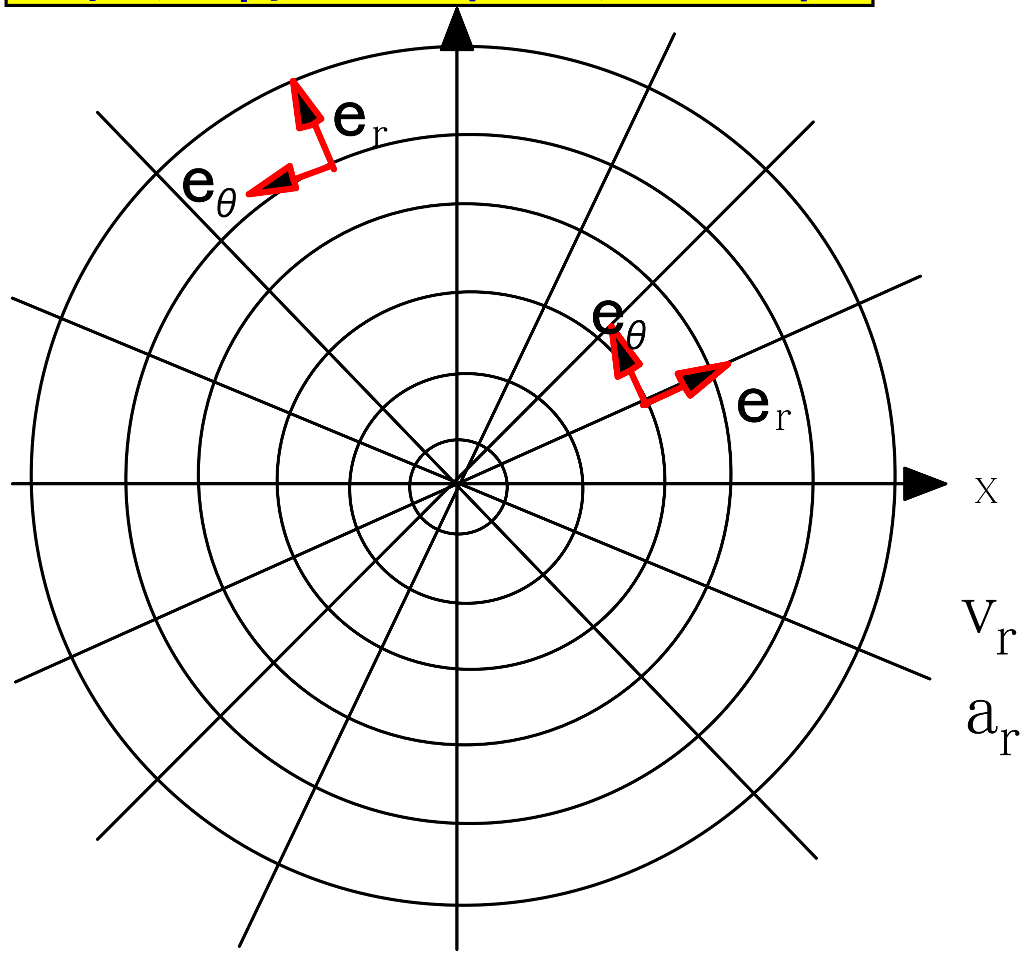
$y = r\sin\theta$

平面運動などの極座標による記述において、速度の成分を時間微分しても、対応する加速度の成分に等しくない;



直交直線座標の場合，
どの位置でも基本ベクトル
（座標軸向きの大きさ1のベクトル）の
向きは同じである。

極座標と基本ベクトル系



極座標の場合，
位置により基本ベクトル
（座標軸向きの大きさ1のベクトル）
の向きは変化する。
　この座標軸の時間的変化の効果
が余分な項として不可される。

$$v_r = \dot{r}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

5. 3次元系における他の座標表示

5.1　3　球座標系（次元極座標系)の位置ベクトル; (r, θ , ϕ)

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x},$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

半径、二つの角度が増加する方向の単位ベクトルをそれぞれ定義する:

$$\vec{\mathrm{e}}_r, \vec{\mathrm{e}}_\theta, \vec{\mathrm{e}}_\phi$$

位置ベクトルの表現

$$\vec{r} = r \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$$

注意：球座標系の場合、一般には、動径rだけではなく、
単位ベクトルの向きも時間とともに変化する