

速度と加速度 (1)

- 背景:

運動学: 物体 (粒子) の力学的運動を考える学問、力は明示的には考えない。

微積分: 17世紀、ニュートン (英) とライプニッツ (独) により独立に発明された数学的方法。
物体 (粒子) の空間的時間的变化を定量的に記述できる。

- 要点:



- 背後の思想

運動していることが一般的、
特殊な運動としての「静止」

広がりをもつ現実の物体 (の運動) → 抽象化: (点) 粒子、質点

時間の一様等質無限性

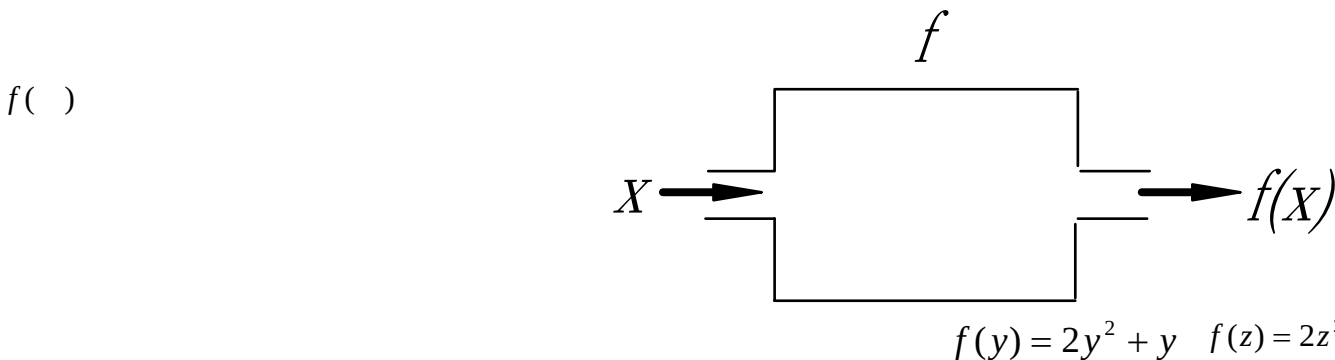
空間の一様等質無限性

関数とは何だろうか

ある量 (変数) を入力したときに、与えられたやり方・規則で別の量に対応させる機能をもつ関係を関数という。

例1: $f(x) = 2x^2 + x$ x という変数 (量) に対して、

$2x^2 + x$ という値 (量) に対応させること、またはその機能を意味する。



さらに次のように表現することもできるだろう。

$$f() = 2()^2 + ()$$

すなわち、関数とは $()$ に何らかの量が“入力”されると

$f()$ という値を“出力”する (作る・計算する) という機能を表わすのである。

例2: $f(x) = ax^2 + bx, (a, b : \text{一定})$

この例のように関数形として、明示的には与えられていないが、変数には関係のない定数 (a, b) が含まれる場合もある。もちろん、この場合にも例1と同様に

$$f(y) = ay^2 + by$$

とも表すことができる。さらに、次のように表してもよい。

$$f(z) = az^2 + bz$$

さらに次のように表現することもできるだろう。

$$f(\quad) = a(\quad)^2 + b(\quad)$$

関数の本質はその機能 (function) にある！

変数 x の関数 $f(x)$ を x で微分すること

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) \equiv x \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$f(x) \equiv 3x^2 + 5x + 8 \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d(3x^2 + 5x + 8)}{dx} = 6x + 5$$

$$f(x) \equiv \sin x \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x,$$

$$f(x) \equiv \cos x \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$$

合成関数の微分

変数 x の関数 $u(x)$ 「変数」 $u(x)$ の関数 $f(u)$

$$\begin{aligned}\frac{df(u(x))}{dx} &\equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))}{\Delta x}, \quad u(x + \Delta x) \equiv u(x) + \Delta u \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{df(u(x))}{dx} = \left(\frac{df}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right)}$$

実例

$$f(x) \equiv \sin(2x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\sin(2x)]}{dx} = \frac{d[\sin(u)]}{du} \frac{du}{dx} = 2 \cos(2x),$$

$$f(x) \equiv \cos(2x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\cos(2x)]}{dx} = \frac{d[\cos(u)]}{du} \frac{du}{dx} = -2 \sin(2x),$$

$$f(x) \equiv \sin(\omega x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\sin(\omega x)]}{dx} = \frac{d[\sin(u)]}{du} \frac{du}{dx} = \omega \cos(\omega x),$$

$$f(x) \equiv \cos(\omega x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\cos(\omega x)]}{dx} = \frac{d[\cos(u)]}{du} \frac{du}{dx} = -\omega \sin(\omega x),$$

変数 t の関数 $f(t)$ を t で微分すること

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

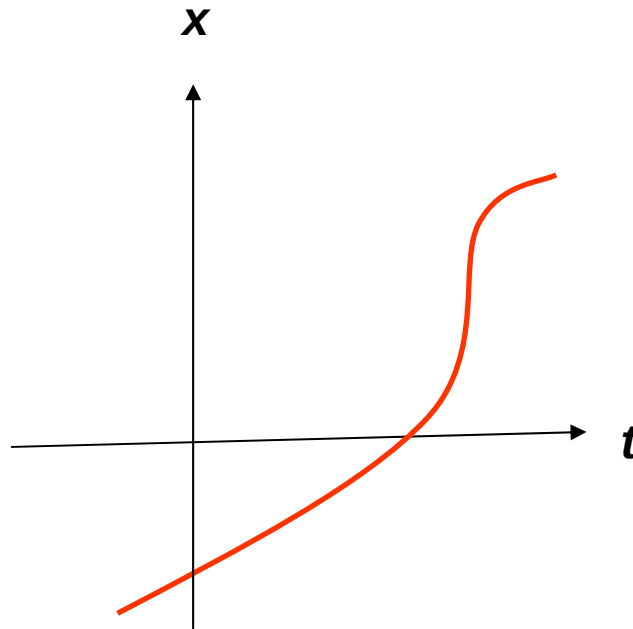
$$f(t) \equiv t \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1$$

$$f(t) \equiv 3t^2 + 5t + 8 \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d(3t^2 + 5t + 8)}{dt} = 6t + 5$$

$$f(t) \equiv \sin t \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t,$$

$$f(t) \equiv \cos t \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t,$$

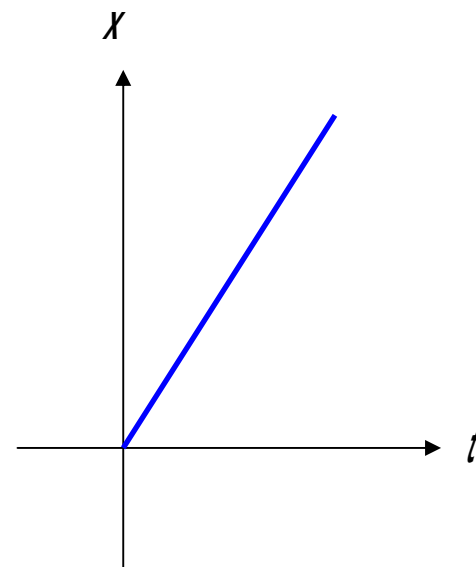
時間 t の関数としての物体 (粒子) の位置 $x(t)$



位置 x の時間微分としての速度 v_x

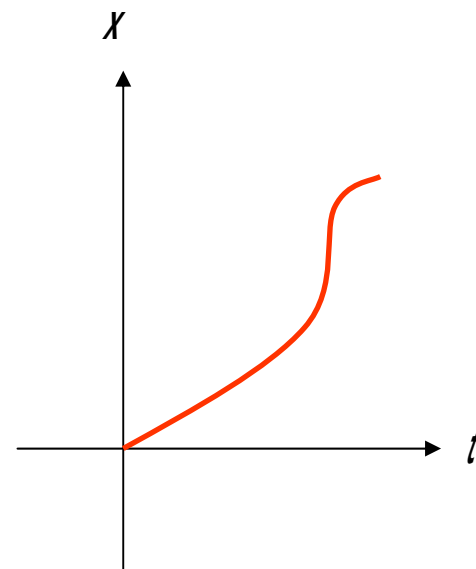
平均速度

$$\begin{array}{l} \text{時間変化 } \Delta t \\ \text{位置変化 } \Delta x \end{array} \longrightarrow \bar{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



時刻 t における(瞬間)速度

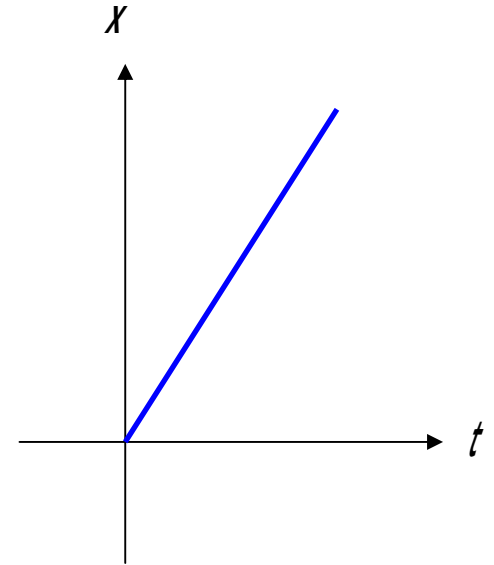
$$\begin{aligned} v_x &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &\equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x} \end{aligned}$$



速度 v_x の時間微分としての加速度 a_x

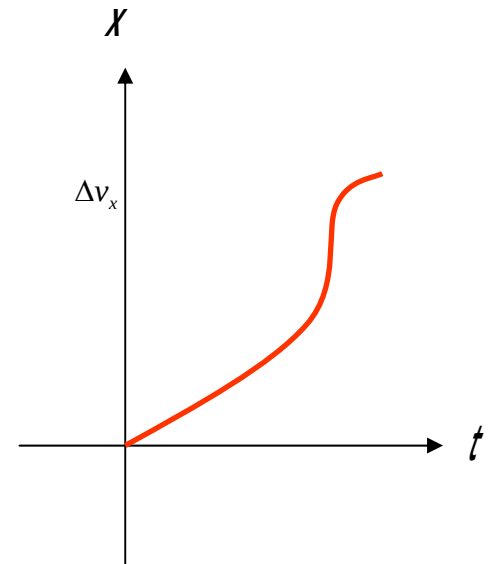
平均加速度

$$\begin{array}{l} \text{時間変化 } \Delta t \\ \text{速度変化 } \Delta v_x \end{array} \longrightarrow \bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$



時刻 t における(瞬間)加速度

$$\begin{aligned} a_x &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \equiv \dot{v}_x \\ &\equiv \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \equiv \ddot{x} \end{aligned}$$



速度から位置(変化)へ

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t v_x(t') dt' &= \int_{t_0}^t \frac{dx(t')}{dt'} dt' \\ &= x(t) - x(t_0)\end{aligned}$$

速度の時間についての積分→位置変化

加速度から速度(変化)へ

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t a_x(t') dt' &= \int_{t_0}^t \frac{dv_x(t')}{dt'} dt' \\ &= v_x(t) - v_x(t_0)\end{aligned}$$

加速度の時間についての積分→速度変化