（１次元における速度、加速度）velocity-1dim-qa050929.tex
$x$ 軸上で運動する粒子の任意の時刻 $t$ における位置 $x$ が以下のように与えられている。それぞれ場合に速度 $v_x$、加速度 $a_x$ を計算せよ。$(b, c, d, \omega$ はそれぞれの関係式ごとに適当な次元をもつ定数)。

1. $x(t) = bt^2 + ct + d.$
2. $x(t) = b \cdot \cos(\omega t) + c \cdot \sin(\omega t).$
3. $x(t) = b \cdot \mathrm{e}^{-ct} \cdot \cos(\omega t).$

(解答例)

1. 速度、加速度の定義より

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = 2bt + c, \tag{1}$$

$$a_x \equiv \frac{dv_x}{dt} = 2b. \tag{2}$$

2. 同様に、

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -b\omega \sin(\omega t) + c\omega \cos(\omega t), \tag{3}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cos(\omega t) - c\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x. \tag{4}$$

3. 同様に、

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = b[-c\mathrm{e}^{-ct} \cos(\omega t) + \mathrm{e}^{-ct}(-\omega) \sin(\omega t)], \\
&= -bc\mathrm{e}^{-ct} \cos(\omega t) - bw\mathrm{e}^{-ct} \sin(\omega t) && (5) \\
&= -b\mathrm{e}^{-ct}[c \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)], && (6) \\
a_x &= \frac{dv_x}{dt} \\
&= -b[-c\mathrm{e}^{-ct}(c \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) + \mathrm{e}^{-ct}(-c\omega \sin(\omega t) + +\omega^2 \cos(\omega t))] \\
&= bc^2\mathrm{e}^{-ct} \cos(\omega t) - b\omega^2\mathrm{e}^{-ct} \cos(\omega t) + 2bc\omega\mathrm{e}^{-ct} \sin(\omega t) && (7) \\
&= b\mathrm{e}^{-ct}[(c^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2c\omega \sin(\omega t)] && (8) \\
[&= -(\omega^2 + c^2)x - 2c\dot{x}] && (9)
\end{aligned}$$