

回転によるベクトルの時間的变化

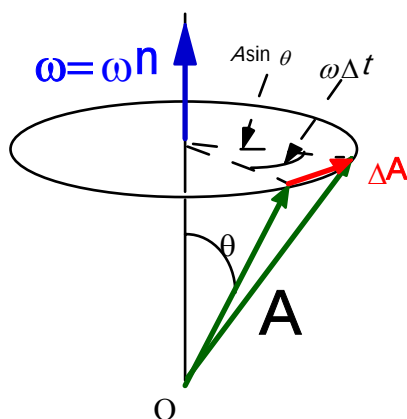
簡単のために、物体のある点 O を通る一つの軸まわりの回転を考え、初めの時刻からの物体の回転角を φ とする。時間 Δt の間に角度 $\Delta\varphi$ だけ物体が回転したとすると、角速度 ω は

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

回転軸に右ねじの軸を一致させ、回転に合わせて右ねじをまわしたとき、右ねじの進む方向にとった単位ベクトルを $\mathbf{n}$ として、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$ を定義する。ここで、大きさ A のベクトル $\mathbf{A}$ をこの回転軸のまわりに回すとき、回転 (rotation) による時間的变化率は次のようになる。

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

証明：このベクトルの始点を点 O におき、回転軸からの角度を θ とする。時間 Δt の間に $\mathbf{A}$ の終点 (先端) は半径 ($A\sin\theta$) の円周上を運動する。 Δt 間のこのベクトルの変位の大きさ ΔA は $\Delta\varphi \cdot A\sin\theta$ となる。



したがって回転による $\mathbf{A}$ の時間的变化率のおおきさは

$$\left| \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{rot}} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} A\sin\theta = \omega A\sin\theta.$$

である。ベクトル積 (外積) の定義を考えれば、向きは自明であろう。(終)

実例 1 : $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ のように角速度ベクトルが z 軸向きの場合。

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = (-\omega A_y, \omega A_x, 0)$ となり、 $\mathbf{A}$ の時間変化率ベクトルは xy 面上になる。

実例 2 : $\mathbf{A}$ と $\boldsymbol{\omega}$ が同じ向きであれば、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ となり、 $\mathbf{A}$ を回転させる効果はないことを意味する。

実例 3 : $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ の場合。 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = (\omega_y A_z - \omega_z A_y, \omega_z A_x - \omega_x A_z, \omega_x A_y - \omega_y A_x)$ となり、 $\mathbf{A}$ の時間変化率ベクトルは x, y, z 成分をもつ。

