（バネでつながれた2粒子系の運動 two-body-coupled-spring-qa070118.tex
質量 m, M の2つの粒子 A,B をバネ定数 k の軽いバネで結び、滑らかな水平面で直線的に振動させる。このとき、次の問いに答えよ。

1. 2粒子の、つりあいの位置からの変位の x 座標をそれぞれ x_A, x_B、そして相対座標を $x \equiv x_A - x_B$ とする。2粒子の重心の x 座標を今原点に選べば、x_A, x_B は相対座標と2つの粒子の質量によってどう書けるか。
2. この2粒子系の換算質量 μ を求めよ。
3. バネの自然長を x_0 として、2粒子系の相対運動の方程式を記せ
4. 2粒子系の相対運動の方程式の解を考えることにより、この振動の周期を求めよ。

(解答例)

1. 題意より2粒子の重心の x 座標を原点とすると
$$0 = \frac{mx_A + Mx_B}{m+M} \tag{1}$$
この式と相対座標の定義式より、
$$x_A = \frac{M}{m+M}x, x_B = -\frac{m}{m+M}x. \tag{2}$$
2. 題意より2粒子の重心の x 座標を原点とすると
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \to \mu = \frac{mM}{m+M}. \tag{3}$$
3. フックの法則より $F = -k \cdot (x - x_0)$ となるので, 2粒子系の相対運動の方程式は
$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) \tag{4}$$
となる。
4. 未知関数 x を $x - x_0 \equiv y$ と置き換えると、$d^2x/dt^2 = d^2y/dt^2$ となるので、運動方程式とその一般解は
$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \to y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \ \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{\mu}}, (y_0, \alpha : \text{積分定数}) \tag{5}$$
となるので、周期 T は角振動数 ω_0 より
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}} \tag{6}$$
と求まる。