

(終端速度の実例) filename=terminating-velocity-qa060512.tex

空気中など媒質中を微小な物体がゆっくり落下するときは速度に比例する抵抗力が働く。物体の質量を m 、重力の加速度の大きさを g 、抵抗力の比例係数を b として、次の問に答えよ。

- 鉛直下向きを $+x$ 軸として運動方程式を書け。
- 実験によると、半径 R の微小球状の物体に対しては、抵抗力の比例係数 b は、 $b = 6\pi R\eta$ と表される。ただし、 η は媒質の粘性率である。また、物体の密度 ρ_0 として、終端速度 v_∞ を R, ρ_0, g, η で表せ。
- 具体的に次の場合に、終端速度 v_∞ を計算せよ。ただし、 $R = 10^{-6}\text{m}, \eta = 1.8 \times 10^{-5}\text{Ns/m}^2, \rho_0 = 10^3\text{kg/m}^3, g = 9.80\text{m/s}^2$ とする。

(解答例)

- 鉛直下向きを $+x$ 軸であるから、重力は下向き、速度比例抵抗力は上向きだから、運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv \quad (1)$$

となる。

- 終端速度は加速度がゼロとなる速度であるから、

$$\begin{aligned} v_\infty &= \frac{mg}{b} \\ &= \frac{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0\right)g}{6\pi R\eta} \\ \rightarrow v_\infty &= \frac{2R^2\rho_0g}{9\eta} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、質量 m と半径 R 、密度 ρ_0 の関係 $m = (4\pi R^3/3)\rho_0$ を用いた。

- 前問の結果に、与えられた数値を代入すると

$$\begin{aligned} v_\infty &= \frac{2(10^{-6}\text{m})^2 \times 10^3\text{kg/m}^3 \times 9.80\text{m/s}^2}{9 \times 1.8 \times 10^{-5}\text{Ns/m}^2} \\ &= \left(\frac{2 \times 9.8}{9 \times 1.8}\right) \times 10^{-12+3+5} \left(\frac{\text{m}^2 \text{ kg m}^{-3} \text{ m s}^{-2}}{\text{N s m}^{-2}}\right) \\ \rightarrow v_\infty &= 1.2 \times 10^{-4} \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (3)$$