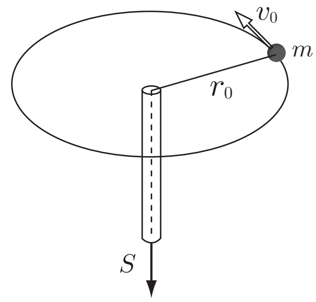
(太陽系形成モデル)solarsystemmodel-qa070629.tex



鉛直な細い管を通した軽いひもの先端に、質量 m の重りをつけ、糸の上端を天井に固定し、水平面内で初め、半径 r_0, 速さ v_0 の等速円運動をさせる。ひもの長さは変化しないとする。

1. このひもをゆっくり引っ張って、円運動の半径を r_1 に縮めたときのおもりの速さ v_1 を求めよ（$= r_0, r_1, v_0$ で表す式を求めよ。）

2 半径 r_0 のときの角速度を ω_0 とすると、半径 r_1 のときの角速度 ω は ω_0 と比べてどうなるか。

3 前問において、運動エネルギーの変化 ΔK を m, r_0, r_1 と一定の角運動量 L で表す式を求めよ。また、これは増加か減少のどちらか理由をつけて述べよ。

4 ひもの張力が半径 r_0 から半径 r_1 までの間に行う仕事を計算し, 前問の結果と比べよ。

(解答例)

1. 今、張力は中心力の性質をもっているので、角運動量 $L = r_0 m v_0 = r_1 m v_1$ が保存される。したがって

$$v_1 = \left(\frac{r_0}{r_1}\right) v_0 \tag{1}$$

2. 再び、角運動量保存則を用いて

$$\begin{aligned} v_0 &= r_0\omega_0,\ v_1 = r_1\omega_1 \rightarrow L = mr_0^2\omega_0 = mr_1^2\omega_1 \\ \rightarrow \omega_1 &= \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \omega_0 > \omega_0 \end{aligned} \tag{2}$$

3. 保存される角運動量 L を用いて

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{L^2}{2mr_0^2} > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

半径は縮む $(r_0 > r_1)$ ので、運動エネルギーは増加する。

4. 経路途中で保存される角運動量 $L = rmv$ である。張力の大きさ S として、向心方向の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = S \tag{4}$$

と表される。また、張力 $\vec{S}$ の向きと位置ベクトルの向きが逆向きであることに注意して、張力の行う仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{r_1} \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{r} \quad = -\int_{r_0}^{r_1} \frac{L^2}{mr^3} dr \\ &= \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{L^2}{2mr_0^2} \end{aligned} \tag{5}$$

となる。すなわち、張力の行う仕事 W は運動エネルギーの変化 ΔK と等しくなり、運動エネルギーの変化が外力（=張力）のする仕事に等しいという仕事エネルギー定理の一例となっている。