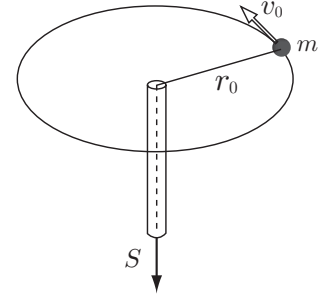


鉛直な細い管を通した軽いひもの先端に、質量 m の重りをつけ、糸の上端を天井に固定し、水平面内で初め、半径 r_0 、速さ v_0 の等速円運動をさせる。ひもの長さは変化しないとする。



1. このひものをゆっくり引っ張って、円運動の半径を r_1 に縮めたときのおもりの速さ v_1 を求めよ ($= r_0, r_1, v_0$ で表す式を求めよ。)
- 2 半径 r_0 のときの角運動量を ω_0 とすると、半径 r_1 のときの角運動量 ω は ω_0 と比べてどうなるか。
- 3 前問において、運動エネルギーの変化 ΔK を m, r_0, r_1 と一定の角運動量 L で表す式を求めよ。また、これは増加か減少のどちらか理由をつけて述べよ。
- 4 ひもの張力が半径 r_0 から半径 r_1 までの間に行う仕事を計算し、前問の結果と比べよ。

(解答例)

1. 今、張力は中心力の性質をもっているので、角運動量 $L = r_0 m v_0 = r_1 m v_1$ が保存される。したがって

$$v_1 = \left(\frac{r_0}{r_1} \right) v_0 \quad (1)$$

2. 再び、角運動量保存則を用いて

$$\begin{aligned} v_0 &= r_0 \omega_0, \quad v_1 = r_1 \omega_1 \rightarrow L = m r_0^2 \omega_0 = m r_1^2 \omega_1 \\ \rightarrow \omega_1 &= \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 \omega_0 > \omega_0 \end{aligned} \quad (2)$$

3. 保存される角運動量 L を用いて

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \frac{L^2}{2 m r_1^2} - \frac{L^2}{2 m r_0^2} > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

半径は縮む ($r_0 > r_1$) ので、運動エネルギーは増加する。

4. 経路途中で保存される角運動量 $L = r m v$ 、張力の大きさ S は向心方向の運動方程式より $m v^2 / r$ と表されることが、保存される向きが半径方向と逆向きであることに注意して、張力の行う仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^{r_1} \frac{L^2}{m r^3} dr \\ &= \frac{L^2}{2 m r_1^2} - \frac{L^2}{2 m r_0^2} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。すなわち、張力の行う仕事 W は運動エネルギーの変化 ΔK と等しくなり、運動エネルギーの変化が外力(＝張力)のする仕事に等しいという仕事エネルギー定理の一例となっている。