(スカイダイビング)filename=skydiving-qa080502.tex

高い塔からスカイダイビングした人 (質量 m) が重力と慣性抵抗を受けて落下する運動について次の問いに答えよ。浮力は無視してよい。重力加速度の大きさを g とする。

1. 速度 v のときの慣性抵抗力を $-kv^2(k:$ 定数$)$ として運動方程式を記せ。
2. 終端速度 v_∞ を求めよ（＝問題中に与えられた文字を用いて表せ)。
3. 初期条件 $v(t=0)=0$ の下で、落下後の時間 t における速度を求めよ。ただし、終端速度 v_∞ を用いてもよい。

(解答例)

1. 運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \tag{1}$$

2. まず、終端速度 v_∞ を求める。

$$0 = mg - mkv_\infty^2 \tag{2}$$
$$\to v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \tag{3}$$

3. 次に微分方程式の一般解を求める。

$$m\frac{dv}{dt} = -k(v^2 - \frac{mg}{k}) \tag{4}$$
$$= -k(v^2 - v_\infty^2) \tag{5}$$
$$\to \frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = -\frac{k}{m}dt \tag{6}$$
$$\to \int \frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = -\frac{k}{m}\int dt \tag{7}$$
$$\to \frac{1}{2v_\infty}\int \left\{\frac{1}{v-v_\infty} - \frac{1}{v+v_\infty}\right\}dt = -\frac{k}{m}t + C' \quad (C' : \text{積分定数}) \tag{8}$$
$$\to \frac{1}{2v_\infty}\log_e\left|\frac{v-v_\infty}{v+v_\infty}\right| = -\frac{k}{m}t + C' \tag{9}$$
$$\to \frac{v-v_\infty}{v+v_\infty} = C\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\cdot 2v_\infty t} \quad (C \equiv \pm \mathrm{e}^{2v_\infty C'}) \tag{10}$$

4. 数式計算を容易にするために、$\frac{b}{m}\cdot 2v_\infty = \frac{g}{v_\infty^2}\cdot 2v_\infty = \frac{2g}{v_\infty} \equiv B$ とおいて特殊解を求める。

$$0 = v(0) \text{ より} \tag{11}$$
$$-\frac{v_\infty}{v_\infty} = C \to C = -1 \tag{12}$$
$$\frac{v-v_\infty}{v+v_\infty} = -\mathrm{e}^{-Bt} \tag{13}$$
$$\to v - v_\infty = -(v+v_\infty)\mathrm{e}^{-Bt} \tag{14}$$

$$\rightarrow v(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{Bt}}) = \mathrm{v}_\infty(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{Bt}}) \tag{15}$$

$$\rightarrow v = v_\infty \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-Bt}}{1+\mathrm{e}^{-Bt}}\right) = v_\infty \left(\frac{1-\exp(-\frac{2g}{v_\infty}t)}{1+\exp(-\frac{2g}{v_\infty}t)}\right) \tag{16}$$

ここで、指数関数の記号 $\exp(x) \equiv \mathrm{e}^x$ を用いた。