

地球の密度を一定の球であると仮定すると、地球と人工衛星の間の万有引力(重力)は、地球の質量 (M) が、その中心に集中した場合の万有引力と近似できるとする。次の問いに答えよ。

1. 地球の中心から半径 R の円軌道を周回する質量 m の人工衛星の (地球の中心に対する) 角運動量の大きさ ℓ を R, M, m と重力定数 G で表す関係式を求めよ。
2. 前問と同じ条件で、人工衛星の運動エネルギー K 、位置エネルギー U 及び力学的エネルギー E を R, ℓ, m で表す関係式を求めよ。
3. 円または円に近い軌道の場合、大気の抵抗により、人工衛星の半径 R 、速さ v はどうなるか理由を述べて説明せよ。

(解答例)

1. 円周方向の速さを v とすると角運動量の定義より

$$\ell = R \cdot mv. \quad (1)$$

動径方向の運動方程式は

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (2)$$

$$\rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{R}}. \quad (3)$$

式 (3) に式 (1) を代入すると

$$\therefore \ell = \sqrt{GMm^2} \sqrt{R}. \quad (4)$$

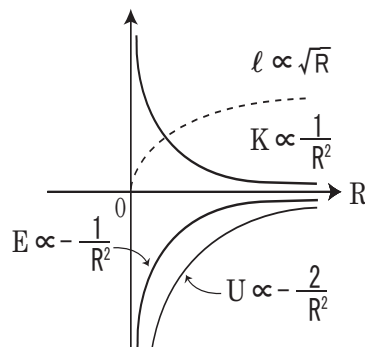
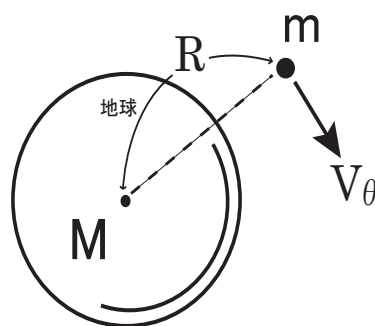
2.

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad U = -G \frac{Mm}{R}, \quad E = K + U. \quad (5)$$

式 (1) より

$$v = \frac{\ell}{mR}, \quad (6)$$

式 (6) を式 (5) の K に代入すると



$$K = \frac{\ell^2}{2mR^2} > 0 \quad (7)$$

となる。式 (2) より、 $GMm/R = mv^2$ となる。この結果を式 (5) の U, E に代入し、式 (7) を用いると

$$U = -mv^2 = -2K = -\frac{\ell^2}{mR^2} < 0, \quad E = -K = \frac{1}{2}U = -\frac{\ell^2}{2mR^2} < 0. \quad (8)$$

が得られる。

3. 空気の抵抗により力学的エネルギー E が減少する。このとき、式 (8) より

$$E = \frac{1}{2}U = -\left(\frac{GMm}{2}\right)\frac{1}{R} \rightarrow R: \text{減少} \quad (9)$$

となる。さらに、式 (7) の運動エネルギー K について考えると

$$K: \text{増加} \rightarrow \text{速さは増加}$$

となる。(K は増加するが、それ以上に U が減少し、力学的エネルギー E が減少する。)