(「静止」衛星)satelite-2-qa01215.tex

地表から高度 h で地球のまわりの円軌道を一定の速さ v で運動している質量 m の人工衛星を考える。地球と衛星の間の重力は地球の全質量がその中心に集中した場合の重力に近似的に等しいとして以下の問いに答えよ。

1. この人工衛星の速さ v を重力定数 G、高度 h, 地球半径 R_e および地球質量 M_e で表し、速さが軌道半径（$R+h$）によりどのように変化するか述べよ。
2. 人工衛星の回転周期 T を G、h,R_e および M_e で表し、周期の 2 乗が円軌道半径の 3 乗に比例するかど うかをしらべよ。
3. 地球から見て常に同じ方角に見える「静止」衛星の軌道半径 $(r \equiv R_e + h)$ を計算せよ。重力定数 $G = 6.67259 \times 10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$, 地球質量 $M_e = 5.974 \times 10^{24}\mathrm{kg}$ とせよ。
4. この「静止」衛星の速さ v を計算せよ。

(解答例)

1. この人工衛星の、運動方程式（ベクトル関係）の地球中心向きの成分より
$$\begin{aligned} m\left(\frac{v^2}{r}\right) &= G\frac{M_e m}{r^2},\ r = R_e + h \\ \to v &= \sqrt{\frac{GM_e}{R_e + h}}. \end{aligned} \tag{1}$$
速さが軌道半径（$R+h$）の平方に反比例するので、軌道半径が大きいほど遅くなる。
2. 周期 T と円周方向の速さの関係より
$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi(R_e + h)}{v} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}}. \end{aligned} \tag{2}$$
従って、周期 T の 2 乗と軌道半径 $(R_e + h)$ の 3 乗は比例する。
3. 前問の結果と、周期 T が 1 日であるとして、
$$\begin{aligned} (R_e + h) &= \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \times GM_e\right]^{1/3} \\ &= \left[\left(\frac{24 \times 60 \times 60\mathrm{s}}{2 \times 3.14}\right)^2 \times 6.67259 \times 10^{-11}\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \times 5.974 \times 10^{24}\mathrm{kg}\right]^{1/3} \\ &= \left[\left(\frac{24^2 \times 3.6^2 \times 6.672 \times 5.974}{2^2 \times 3.14^2}\right) \times 10^{6-11+24}\frac{\mathrm{s}^2\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}\right]^{1/3} \\ &= 4.22 \times 10^7\mathrm{m} \approx (6400 + 36000)\mathrm{km}. \end{aligned} \tag{3}$$
4. 前問の結果を用いて
$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi(R_e + h)}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 4.22 \times 10^7\mathrm{m}}{24 \times 60 \times 60\mathrm{s}} \\ &= 3.0673 \times 10^3\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{4}$$