(剛体棒の回転;filenema=rodrotation1-qa060720.tex)

長さ ℓ の一様な細い棒の一端Oを鉛直面内でつるし、その回りに自由に回転できるとする。この棒の質量を M, 重力の加速度を g として次の問いに答えよ。

1. 点Oのまわりの慣性モーメント I を計算せよ。
2. この系の物理的状況を図示し、働く力の場所と種類をベクトルで記入せよ。
3. 鉛直線となす角が θ として回転の運動方程式を記せ。
4. 微小振動の場合の周期 T を求めよ。

(解答例)

1. 棒は一様であるから、その線密度 $\lambda = M/\ell$ となる。従って、棒の幅 dx の質量 $dm = \lambda dx = M dx/\ell$ となる。慣性モーメントの定義より
$$I = \int_{x=0}^{x=\ell} x^2 dm = \frac{M}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = \frac{M\ell^2}{3}. \tag{1}$$
2. 重心に鉛直下向に重力(Mg), 軸受けに(適当な向きと大きさの)抗力
3. 鉛直線となす角が θ として、重力は回転を抑制する向きの力のモーメントをもつので、回転の運動方程式は
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg\frac{\ell}{2}\sin\theta \tag{2}$$
となる。
ここで、抗力の大きさはゼロではないが、回転軸からの距離がないので、それによる力のモーメントはゼロである。
4. 微小振動の場合, $\sin\theta \approx \theta$
$$\begin{aligned} I\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -Mg\frac{\ell}{2}\theta. \\ \rightarrow \ddot{\theta} &= -\left(\sqrt{\frac{Mg\ell}{2I}}\right)^2 \theta. \end{aligned} \tag{3}$$
これは単振動の方程式と同じ形であるから、その周期 T は
$$T = \frac{2\pi}{\left(\sqrt{\frac{Mg\ell}{2I}}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{Mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}. \tag{4}$$