剛体の平面運動 filename=rigidbody-2dim100723.tex

1　平面運動を行う剛体の力と運動方程式

剛体の運動がある平面上に限定される場合を考える。剛体の平面運動の自由度は３である。すなわち、並進運動の記述のため、重心の平面上の位置をきめる二つの座標および、この平面に垂直な軸のまわりの回転角（方位角）という 3 つの変数が必要で、それらの時間的変化を決定するための方程式が 3 つが必要である。

平面を xy 面とし、この面に直交する座標軸を z 軸とする。ここでいう平面は水平面の場合もあるが、鉛直面、斜面の場合もあることに注意する。

剛体の質量を M、剛体に作用する n 個の外力 $\{\boldsymbol{F}_i, i=1,2,\cdots,n\}$ のうち x 成分を $\{F_{ix}, i=1,2,\cdots,n\}$、$y$ 成分を $\{F_{iy}, i=1,2,\cdots,n\}$ とすると、並進の運動方程式は

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \tag{1.1}$$

$$M\frac{d^2Y}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \tag{1.2}$$

と表される。重心 G を通り、xy 面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを I_{G} とする。n 個の外力のうち、重心についての（ゼロではない）力のモーメント（=トルク）の個数を n' として、それらの z 成分を $\{N_{iz}, i=1,2,\cdots,n'(n'\leq n)\}$ とすると、回転（自転）の方程式は

$$I_{\mathrm{G}}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n'} N_{iz} \tag{1.3}$$

と表される。ここで、n, n' 間の不等号は、外力のうち、回転軸からの位置ベクトルと外力のベクトルの相対的な方向関係により、ベクトルの外積がゼロとなり、トルクに寄与しない場合

もあるためであることに注意する。

重心の速度ベクトル $\boldsymbol{V}$ の x, y 成分をそれぞれ $V_x \equiv dX/dt, V_y \equiv dY/dt$ とすると、並進の運動方程式は

$$M\frac{dV_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \tag{1.4}$$

$$M\frac{dV_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \tag{1.5}$$

とも表される。同様に、角速度 $\omega \equiv d\theta/dt$ を用いれば、回転の方程式も

$$I_{\mathrm{G}}\frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{n'} N_{iz} \tag{1.6}$$

と表される。

さらに、重心の加速度ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x, y 成分をそれぞれ $A_x \equiv dV_x/dt, A_y \equiv dV_y/dt$ とすると、並進の運動方程式は

$$MA_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \tag{1.7}$$

$$MA_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \tag{1.8}$$

とも表される。同様に、角加速度 $\beta \equiv d\omega/dt$ を用いれば、回転の方程式も

$$I_{\mathrm{G}}\beta = \sum_{i=1}^{n'} N_{iz} \tag{1.9}$$

と表される。

2 運動量定理、力積と角運動量定理、角力積

簡単のために、剛体の重心の並進運動の方向を x 軸に選ぶ。この場合、並進運動の方程式

$$M\frac{dV}{dt} = F \tag{2.1}$$

を時間について, 積分すると運動量定理

$$MV_2 - MV_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt, \tag{2.2}$$

$$V_1 \equiv V(t = t_1), V_2 \equiv V(t = t_2). \tag{2.3}$$

が得られる。ここで、右辺の積分を 力積 という。特に、ある剛体に極短時間 (Δt) だけ大きさ F_0 の力が働き、初速度 0 から速度 V になる場合には、式（2.2 ）は

$$MV \approx F_0 \Delta t \tag{2.4}$$

となる。

剛体の回転の方程式

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{2.5}$$

を時間について積分すると, 角運動量定理

$$I\omega_2 - I\omega_1 = \int_{t_1}^{t_2} N dt \tag{2.6}$$

が得られる。ここで、右辺の積分を 角力積 という。運動量定理のときと同様に、特に、ある剛体に極短時間 (Δt) だけ大きさ N_0 のトルク（力のモーメント）が働き、初めの角速度 0 から角速度 ω になる場合には、式（2.6 ）は

$$I\omega \approx N_0 \Delta t \tag{2.7}$$

となる。

3　剛体の転がり

3.1　回転運動と並進運動の合成としての転がり

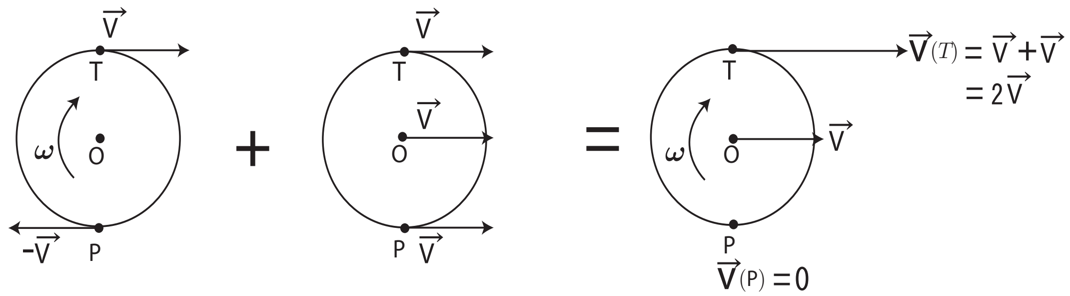
剛体が滑らずに転がる運動を考える。このとき重心の並進方向を x 軸とする。短時間 Δt にその重心の位置の変化を ΔX、重心のまわりの回転角を $\Delta\theta$、剛体の半径を R とすると

$$\Delta X = R\Delta\theta \tag{3.1}$$

が成立する。式（3.1）の両辺を Δt でわり、極限をとり、微分係数を考える。（並進の）速度を $V \equiv dX/dt$、加速度を $A \equiv dV/dt$, 角速度を $\omega \equiv d\theta/dt$,角加速度を $\beta \equiv d\omega/dt$, とすると

$$V = R\omega, \tag{3.2}$$
$$A = R\beta \tag{3.3}$$

が得られる。ここで、剛体の転がりは，重心の並進運動と重心のまわりの回転（自転）の合成された運動であるとみなせることに注意する。

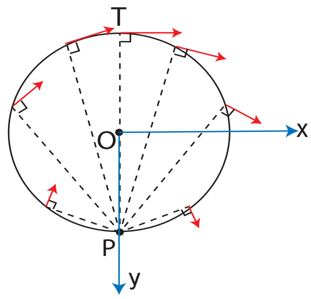


剛体が転がる面との接点の相対速度はゼロで、接点からもっとも遠い点の速度が大きいことを考えると、転がりは接点Pを通る軸の周りの角速度 ω の微小な回転運動を連続的に合成したものである。この意味で、接点Pを回転の一時中心（または瞬間的な回転の中心）という。次に図では、転がる剛体の円周の各部分の速度ベクトルを示す。

ここで、転がる剛体の円周の各部分の速度ベクトルの大きさと向きはどのようにして決まるか考えてみる。転がる剛体の円周の各部分の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が重心の並進速度ベクトル $\boldsymbol{V}$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と重心を通る軸からの動径ベクトル $\boldsymbol{r}'$ により

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{3.4}$$

と表される。ここで、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は大きさ ω で、回転の向きに右ネジを回したとき、右ネジが進む向きである。3次元空間において、回転軸を z 軸に選べば、



$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ となる。ベクトル積（外積）の性質より、$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ は $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}'$ の両方に垂直である。

角速度ベクトルのまわりの回転による時間変化率の関係式 $d\boldsymbol{r}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ の導出：
半径を r' とすると、$\boldsymbol{r}' = (x', y')$ の成分はそれぞれ

$$x' = r' \cos(\omega t), \ \ y' = r' \sin(\omega t) \tag{3.5}$$

と表される。これらの時間変化率は

$$\frac{dx'}{dt} = -r'\omega \sin(\omega t) = -\omega y', \ \frac{dy'}{dt} = r'\omega \cos(\omega t) = \omega x' \tag{3.6}$$

となる。他方、右辺の x, y 成分は, 外積の定義より、それぞれ

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_x = -\omega y', \tag{3.7}$$
$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_y = \omega x' \tag{3.8}$$

となる。故に、導出された。

以下に、典型的な3つの位置について調べてみよう。そのために、座標の原点を剛体の中心とする。右手系の座標軸として、水平右向きに x 軸、鉛直下向きに y 軸、紙面の手前から裏向きに z 軸を選ぶ。

1. 接点 P における速度ベクトル：

$$\boldsymbol{r}' = (0, R, 0), \tag{3.9}$$
$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_x = -\omega R, \tag{3.10}$$
$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_y = 0, \tag{3.11}$$
$$\rightarrow \boldsymbol{v} = (V, 0, 0) + (-\omega R, 0, 0) = 0. \tag{3.12}$$

2. 重心をとおる水平線が円周と交わる進行方向の点 C における速度ベクトル:

$$\boldsymbol{r}' = (R, 0, 0), \tag{3.13}$$
$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_x = 0, \tag{3.14}$$
$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_y = \omega R, \tag{3.15}$$
$$\rightarrow \boldsymbol{v} = (V, 0, 0) + (0, \omega R, 0) = (V, V, 0). \tag{3.16}$$

3. 点 T における速度ベクトル:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= (0, -R, 0), && (3.17)\\ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_x &= \omega R, && (3.18)\\ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')_y &= 0, && (3.19)\\ \to \boldsymbol{v} &= (V, 0, 0) + (\omega R, 0, 0) = (2V, 0, 0). && (3.20) \end{aligned}$$

3.2 転がる物体に働く力

剛体が滑らずに転がる場合、剛体と平面の接点に働く力は、面に垂直な抗力と面に水平な静止摩擦力である。これは、剛体が滑らずに転がる場合に、剛体と平面の接点は瞬間的に「静止」している、または（面に対する）相対速度がゼロであるためである。

他方、転がらずに滑る場合、剛体と平面の接点に働く力は、面に垂直な抗力と面に水平な運動摩擦力である。

3.3 転がりの運動エネルギー

転がっている剛体の, 回転の一時中心 P のまわりの回転の方程式

$$I_p \frac{d\omega}{dt} = N(t) \tag{3.21}$$

が成り立つ。ここで、I_p は一時中心 P のまわりの慣性モーメントである。時間について積分すると、回転の（運動）エネルギー K が

$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \tag{3.22}$$

が得られる。慣性モーメントについての平行軸定理より

$$I_p = I_G + MR^2 \tag{3.23}$$

が成り立つので、式（3.22）に代入すると

$$K = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 \tag{3.24}$$

が得られる。右辺第 1 項は重心 G のまわりの自転の運動エネルギー、第 2 項は重心 G の並進の運動エネルギーである。