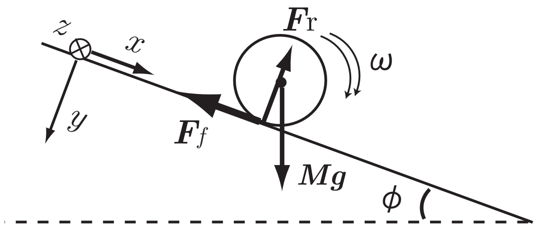
(剛体の平面運動 (斜面上))rigidbody-shamen-qa101018.TEX

質量 M、半径 R の剛体 (重心 G を貫く回転軸について対称な質量分布をもつ剛体) が、その回転軸を水平に保ちながら，傾斜 ϕ の粗い斜面上を滑らずに転がり落ちる運動を考える。この剛体の対称軸の周りの慣性モーメントを I_G とする。重力の加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。

1. 必要な力の記号を適当に用いて、この剛体の重心の並進運動の方程式を記せ。
2. 前問と同様に、この剛体の重心のまわりの回転運動の方程式を記せ。
3. この剛体が滑らずに転がる場合, 並進運動の変位 ΔX、半径 R と回転角度 $\Delta\theta$ の間の関係式（またはその時間微分）を記せ。
4. 斜面下方に向かう剛体の重心の並進加速度を求め、摩擦がなく滑り落ちる場合と比較せよ。
5. この剛体と斜面の間の静止摩擦係数を μ とすると、剛体が滑らないために必要な条件式 (μ と ϕ の関係式) を求めよ。

(解答例)
図のように座標軸を選び、重心の x, y 座標を (X, Y) とする。ω は z 軸周りの角速度である。このとき剛体に働く外力は

重心 G を通る鉛直方向に重力 Mg, 斜面との接点に斜面に垂直上方に抗力 F_r, 接点に斜面に沿って運動と逆向きに摩擦力 F_f



である。

1. 重心の並進の運動方程式は
$$M\ddot{X} = Mg\sin\phi - F_f \tag{1}$$
$$M\ddot{Y} = Mg\cos\phi - F_r \tag{2}$$
となる。

2. 重心のまわりの回転の運動方程式は
$$I_G \cdot \dot{\omega} = R \cdot F_f. \tag{3}$$
(補足：この問題では重力による重心まわりのトルク (力のモーメン) はゼロ。同様に、抗力も重心まわりのトルク (力のモーメン) はゼロ。)

3. θ : 回転角 $\rightarrow$ $\Delta\theta$: θ の変化, ΔX : 斜面の位置変化とすると、この剛体が滑らないための条件:$\Delta X = R \cdot \Delta\theta$ より

$$\dot{X} = R\omega \ \ (\omega \equiv \dot{\theta}) \ \rightarrow \ \ddot{X} = R \cdot \dot{\omega} \tag{4}$$

4. 題意より、y 方向にはつり合っているので $\ddot{Y} = 0$、式 (2) より

$$F_r = Mg\cos\phi \tag{5}$$

式 (1)〜(5) より F_f を消去すると

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= Mg\sin\phi - \frac{I_G\dot{\omega}}{R} \\ &= Mg\sin\phi - \frac{I_G}{R^2}\ddot{X} \end{aligned}$$

となる。従って、

$$(\text{並進加速度}) \equiv \ddot{X} = \left(\frac{MR^2}{MR^2 + I_G}\right) \cdot g\sin\phi \tag{6}$$

摩擦力がなく斜面を滑る加速度は $g\sin\phi$ だから

$$\text{転がるときの加速度} = \left(\tfrac{MR^2}{MR^2+I_G}\right) \times \text{滑るときの加速度} \ < \ \text{滑るときの加速度}$$

(回転ブレーキの効果)

となる。

5. 剛体が滑らない条件は

$$F_f \leq \mu \cdot F_r \ \rightarrow \ \mu \geq \frac{F_f}{F_r} \tag{7}$$

この式に、式 (1),(5),(6) を代入すると

$$\mu \geq \left(\frac{I_G}{I_G + MR^2}\right) \cdot \tan\phi$$

となる。