

剛体とそのつりあい条件

目次

1. 剛体とは何か
2. 剛体概念とその有効性
3. 剛体の質量と重心座標
4. 剛体に働く力と運動方程式
5. 剛体のつりあい(平衡)条件

1. 剛体とは何か

剛体(rigid body)の定義と基本的な性質

- (1) 任意の2点間の距離は不変である系としての剛体
- (2) 任意の2粒子間の距離は不変である多粒子系(質点系)の極限としての剛体
- (3) 無限個(または十分多数)の粒子(または質点)からなる系;
- (4) 形状により、1次元剛体、2次元剛体、3次元剛体に分類することも可能である。
- (5) 剛体の自由度:
物体の運動の記述に必要な独立な座標の数を運動の自由度(degree of freedom)という。
- (6) 剛体の運動は、その定義より、剛体自体の振動運動はなく、並進(重心の移動運動)と回転(自転, rotation)からなる。並進には直線的な運動だけでなく、ある点の周りの剛体の重心の周回運動、すなわち公転(revolution)も含まれることに注意する。

剛体の力学には、次の2点を除いて、多粒子系の力学の結論、性質のほとんどが適用できる。

- 1) 質量は連続的に分布しているので、質量に関係する和を積分に置き換える。
- 2) 力は各粒子に働くのではなく、剛体の特定の点(着力点)に働く。

2. 剛体概念とその有効性

- (1)身の回りの物体の多くは有限の広がりをもった固い物体である。
- (2)物体の形状を変化させようとするとき、それを妨げる大きな力が働く場合には、この物体を剛体と見なしてよい。

実例：戦闘機などが航空母艦に着艦する際、そのタイヤの一部がかすかに甲板に触れたとたん、その戦闘機は空母と一体的な運動、ローリング（Rolling, 船の横揺）をするらしい。

- (3)剛体化原理：多粒子系（質点系）は、弾性体でも流体でも、その各部分が静止状態（つりあいの特殊な場合）にある限り、任意に着目した部分に働く外力の条件は剛体のつりあい条件と同じ

- (4)人間の視覚（運動知覚）には、外部の物体の剛体性（外界が局所的には、近似的に剛体と見なせること）が特別な役割を果たしている。

デヴィッド・マー「ビジョンー視覚の計算理論と脳内表現」

（産業図書、1988年、pp.230-231）

- (5)物体の運動、座標系、時間など古典物理学の基礎的な概念は、剛体概念と不可分の関係にあった。（岩波講座・現代物理学の基礎「古典物理学I」、1978年、p.20-23）

3. 剛体の質量と重心座標

剛体の質量

質量分布が連続的である多粒子系の極限としての剛体

$$M \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \equiv \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$\rho(x, y, z)$ = 剛体中の点 (x, y, z) 付近の密度

剛体の重心座標

$$X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i x_i / M \equiv \iiint x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz / M,$$

$$Y \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i y_i / M \equiv \iiint y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz / M,$$

$$Z \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i z_i / M \equiv \iiint z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz / M,$$

$$\mathbf{R} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i / M \equiv \iiint \mathbf{r} \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz / M$$

$$\left(\equiv \int \mathbf{r} \cdot \rho(\mathbf{r}) dv / M = \iiint \mathbf{r} \cdot \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} / M \right)$$

4. 剛体に働く力と運動方程式

剛体に働く力＝外力または複数の外力の合力

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &\equiv \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)} + \cdots + \mathbf{F}_k^{(e)} \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_j^{(e)}; k = \text{外力の個数}\end{aligned}$$

剛体の並進運動の方程式

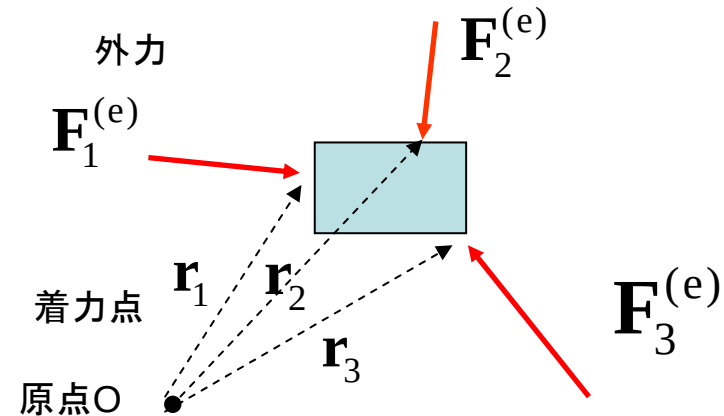
$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)};$$

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \text{剛体の重心の速度ベクトル}$$

$$\mathbf{F}^{(e)} \equiv \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_j^{(e)}; \text{剛体に働く外力の合力}$$

剛体の(全体の)回転の運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{j=1}^k \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j^{(e)}; \quad \mathbf{L} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \equiv \iiint \mathbf{r} \times \rho(x, y, z) \mathbf{v} dx dy dz \\ &\left(\equiv \int \mathbf{r} \times \rho(x, y, z) \mathbf{v} dv = \iiint \mathbf{r} \times \rho(x, y, z) \mathbf{v} d^3\mathbf{r} \right),\end{aligned}$$



剛体の重心の、原点Oのまわりの角運動量と重心に働く外力和のトルク

$$\mathbf{L}_G \equiv \mathbf{R} \times M\mathbf{V}, \mathbf{N}_G^{(e)} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(e)}$$

重心の回転運動方程式

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{N}_G^{(e)}}$$

剛体の、重心Rのまわりの、角運動量と外力和のトルク

$$\begin{aligned} ; \mathbf{L}' &\equiv \iiint \mathbf{r}' \times \rho(x, y, z) \mathbf{v} \cdot dxdydz \\ &= \iiint (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \rho(x, y, z) \mathbf{v} \cdot dxdydz \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}^{(e)'} \equiv \sum_{j=1}^k \mathbf{r}_j' \times \mathbf{F}_j^{(e)}$$

重心のまわりの回転(自転)の運動方程式

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}^{(e)'}}$$

5. 剛体のつりあい(平衡)条件

つりあい条件1

=外力の合力がゼロ

重心の並進の運動状態が不変:

$$\mathbf{F}^{(e)} \left(\equiv \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_j^{(e)} \right) = 0$$

初め、重心が静止している場合には、その後も重心は静止。

初め、重心がある速度をもっていれば、等速度運動を続ける。

つりあい条件2

=重心のまわりの外力のトルクのベクトル和がゼロ

重心Gのまわりの回転(=自転)の運動状態が不変:

$$\mathbf{N}^{(e)'} \left(\equiv \sum_{j=1}^k \mathbf{r}_j' \times \mathbf{F}_j^{(e)} \right) = 0$$

初め、重心のまわりに静止している場合には、その後も静止。

初め、重心まわりに回転している場合には、その後も等角運動量で回転を続ける。

(このような注意は、物体に外力が働かない場合に成立する慣性の法則の内容についての注意と同様である。)

つりあい条件2は次のようにも表してよい。(このファイルの作者が知る限り、最後に引用する参考文献を除いて、明示的には指摘されていない。)

重心や原点を含む任意の点P(その位置ベクトル $\mathbf{R}_P$)のまわりの外力のトルクの和がゼロ

$$\mathbf{N}_P^{(e)} \left(\equiv \sum_{j=1}^k (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}_j^{(e)} \right) = 0$$

理由: 次式のように、一般には、外力のトルクの和は、考える点により異なる。

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_P^{(e)} &\equiv \sum_{j=1}^k (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}_j^{(e)} \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j^{(e)} - \mathbf{R}_P \times \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_j^{(e)} \\ &\neq \sum_{j=1}^k \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j^{(e)}. \end{aligned}$$

しかし、つりあい条件1が成り立つ場合には、右辺の第2項がゼロとなり、結果的に、外力のトルクの値は同じになる！

したがって、トルクを考える基準点を特に指定せずに、次のように表してもよい。

$$\mathbf{N}^{(e)} \left(\equiv \sum_{j=1}^k \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j^{(e)} \right) = 0$$

(2次元、xy面上)では

剛体の運動の自由度:

並進2、回転1

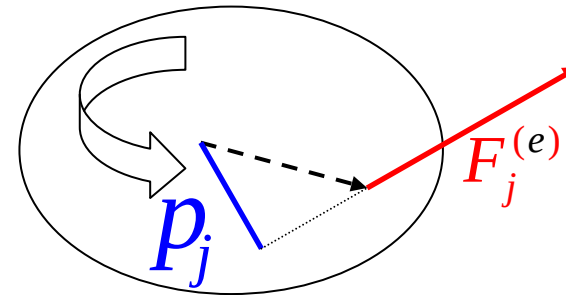
つりあい条件1

$$\sum_{j=1}^k F_{jx}^{(e)} = 0,$$
$$\sum_{j=1}^k F_{jy}^{(e)} = 0$$

任意の点の周りの外力のトルクの和がゼロ

つりあい条件2

$$\sum_{j=1}^k (x_j \cdot F_{jy}^{(e)} - y_j \cdot F_{jx}^{(e)}) = 0$$
$$\rightarrow \sum_{j=1}^k (\pm) p_j F_j^{(e)} = 0,$$



p_j = j 番目の外力の「腕」の長さ

$F_j^{(e)}$ = j 番目の外力の大きさ

($\pm$):トルクの向きが左 (右) 周りの時+ (−)

→ 外力のトルクを計算する場合には、
それぞれの系において計算に都合のよい点の周りで考えてよい！

参考文献:

V.D.バーガー、M.G.オルソン、「力学-新しい視点に立つて」、培風館、1975年：
p.142。

後藤賢一「力学通論」、学術出版社、1981年：pp.197-198.

山本義隆「新・物理入門」、駿台文庫、1987年：pp.110-111.

近藤 淳「力学」、裳華房、1993年：p.194。

伊東敏雄「力学」、学術出版社、1994年：pp.143-144。

永田一清「新・基礎 力学」、サイエンス社、2005年：p.174。