(速度比例抵抗力と重力による運動)filename=resistence3-qa051006.tex

空気中で質量 m の雨滴がその速さに比例する抵抗力を受けて落下するとき、任意の時刻における速さ v は次の微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \ (b > 0 : \text{定数}) \tag{1}$$

を満たす。

1. 初め、位置 $x(t=0)=0$, 速度 $v(t=0)=0$ として、この微分方程式を解け（＝特殊解を求めよ)。
2. 終端速度 $v_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} v(t)$ を問題文中に与えられた文字を使って表せ。

(解答例)

1. この抵抗力の単位質量あたりの比例係数を $\gamma \equiv b/m (>0)$ として式（1）を書き直すと

$$\frac{dv}{dt} \ = \ -\gamma(v - \frac{g}{\gamma}) \tag{2}$$

となる。ここで、求めたい未知関数 v を次のように置きかえると

$$v - \frac{g}{\gamma} \ \equiv \ V \ (v \text{と} V \text{が時間に依存}) \tag{3}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} \ = \ \frac{dV}{dt} \tag{4}$$

となる。ここで、微分係数 dv/dt は二つの（微小量としての）微分 dv と dt の商であるとみなして、式（4）を (2) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{V} \ &= \ -\gamma dt \ (\text{微分係数を「分数」のように考えて両辺に分割する！}) \\
\rightarrow \int \frac{dV}{V} \ &= \ -\gamma \int dt \ (\text{微小変化ごとに成立する等式をすべての変化について辺々加える！}) \\
\rightarrow \log_{\mathrm{e}} |V| \ &= \ -\gamma t + c' \ (c' : \text{積分定数）} \\
\rightarrow |V| \ &= \ \mathrm{e}^{-\gamma t + c'} \ (B = \mathrm{e}^A \text{のとき、} \log_{\mathrm{e}} B = A \text{なので}) \\
\rightarrow V \ &= \ \pm \mathrm{e}^{-\gamma t + c'} = c \ \mathrm{e}^{-\gamma t} \ (\pm \mathrm{e}^{c'} \equiv c) \qquad (5) \\
\rightarrow v \ &= \ V + \frac{g}{\gamma} = c \ \mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma} \qquad (6)
\end{aligned}$$

のように、未知関数 $v(t)$ の一般解が得られる。さらに、初期条件を代入して、$v(t)$ の特殊解を求める。

$$0 \ = \ c \ \mathrm{e}^{-\gamma 0} + \frac{g}{\gamma} \rightarrow v(t) = \frac{g}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right)$$

$$v(t) \ = \ \frac{mg}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/m}\right) \tag{7}$$

2. 題意により、終端速度は $v_\infty = mg/b$ となる。