(速度比例抵抗力と重力による運動)filename=resistence2-qa100602.tex

質量 $m$ の粒子が鉛直方向（下向きに $x$ 軸を選ぶ）に、その向きの速度 $v$ に比例する抵抗力が働いているとする。この抵抗力を $-m\gamma v(\gamma > 0)$，重力の加速度の大きさを $g$ とする。初め、位置 $x(t=0)=0,$ 速度 $v(t=0)=0$ として

1. この場合の運動方程式を記せ。
2. 終端速度 $v_\infty$ を問題文中に与えられた文字を使って表せ。
3. 任意の時刻 $t$ における速度 $v(t)$ を求めよ。
4. 任意の時刻 $t$ における位置 $x(t)$ を求めよ。

(解答例)

1.

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\gamma v + mg \\
\to m\frac{dv}{dt} &= -m\gamma v + mg,\ (\text{速度は位置座標の時間微分：}v \equiv \frac{dx}{dt}). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

2. 終端速度は、加速度がゼロになる速度であるから、運動方程式より $v_\infty = g/\gamma$ と表される。
3. 式（1）を書き直すと

$$
\frac{dv}{dt} = -\gamma(v - \frac{g}{\gamma}) \qquad (2)
$$

となる。ここで、求めたい未知関数 $v$ を別の関数名 $V$ に置きなおすと

$$
\begin{aligned}
v - \frac{g}{\gamma} &\equiv V\ (v\text{ と }V\text{ が時間に依存}) \qquad (3) \\
\to \frac{dv}{dt} &= \frac{dV}{dt} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となる。さらに、式（4）を (2) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{V} &= -\gamma dt\ (\text{微分係数を「分数」のように考えて両辺に分割する！}) \\
\to \int \frac{dV}{V} &= -\gamma \int dt\ (\text{微小変化ごとに成立する等式をすべての変化について辺々加える！}) \\
\to \log_e |V| &= -\gamma t + c'\ (c'\text{：積分定数}) \\
\to |V| &= e^{-\gamma t + c'}\ (B = e^A\text{のとき、}\log_e B = A\text{ なので}) \\
\to V &= \pm e^{-\gamma t + c'} = c\ e^{-\gamma t}\ (\pm e^{c'} \equiv c) \qquad (5) \\
\to v &= V + \frac{g}{\gamma} = c\ e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

のように、未知関数 $v(t)$ の一般解が得られる。初期条件を代入して、$v(t)$ の特殊解を求める。

$$\begin{aligned} 0 &= c\,\mathrm{e}^{-\gamma 0} + \frac{g}{\gamma} \\ \rightarrow v(t) &= \frac{g}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) = v_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

この問題の場合、速度はゼロから始まって、十分時間がたてば、終端速度に近づくことがわかる。

4. 前問の結果を時間 $t$ で積分して、$x(t)$ の一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)dt \\ &= \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\mathrm{e}^{-\gamma t} + c \ (c: \text{積分定数}) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで、初期条件を代入して,$x(t)$ の特殊解

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g}{\gamma^2}\mathrm{e}^{-\gamma 0} + c \\ \rightarrow c &= -\frac{g}{\gamma^2} \\ \rightarrow x(t) &= \frac{g}{\gamma}t - \frac{g}{\gamma^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

が得られる。

備考：抵抗力が弱い極限を考えて、位置座標の指数関数をテーラー展開すると

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{g}{\gamma}t - \frac{g}{\gamma^2}\left[1 - \left(1 - \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2}\cdots\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}gt^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$

となり、テーラー展開の第三項が主要項となり、空気抵抗がない場合の関係式に近づくことが分かる。