(速度比例抵抗力)filename=resistence1-qa050614a.tex

x 軸上を運動する粒子に速度に比例する抵抗力が働いているとする。この抵抗力の単位質量あたりの比例係数を γ とする。初め、位置 $x(t=0)=0$, 速度 $v(t=0)=v_0$ として

1. この場合の運動方程式を記せ。
2. 任意の時刻 t における速度 $v(t)$ を求めよ。
3. 任意の時刻 t における位置 $x(t)$ を求めよ。

(解答例)

1.
$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\gamma\frac{dx}{dt} \\ \to m\frac{dv}{dt} &= -m\gamma v,\ (\text{速度は位置座標の時間微分：}v \equiv \frac{dx}{dt}). \end{aligned} \tag{1}$$

2. 式（1）を順次、書き直すと
$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\gamma dt\ (\text{微分係数を「分数」のように考えて両辺に分割する！}) \\ \to \int\frac{dv}{v} &= -\gamma\int dt\ (\text{微小変化ごとに成立する等式をすべての変化について辺々加える！}) \\ \to \log_e|v| &= -\gamma t + c'\ (c' : \text{積分定数）} \\ \to |v| &= e^{-\gamma t + c'}\ (B = e^A\text{のとき、}\log_e B = A\text{なので}) \\ \to v &= \pm e^{-\gamma t + c'} = c e^{-\gamma t}\ (\pm e^{c'} \equiv c) \end{aligned} \tag{2}$$
未知関数 $v(t)$ の一般解が得られる。初期条件を代入して、$v(t)$ の特殊解を求める。
$$\begin{aligned} v_0 &= c\ e^{-\gamma 0} \\ \to v(t) &= v_0\ e^{-\gamma t} \end{aligned} \tag{3}$$

3. 前問の結果を時間 t で積分して、$x(t)$ の一般解は
$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)dt \\ &= -\frac{v_0}{\gamma}e^{-\gamma t} + c\ (c : \text{積分定数）} \end{aligned} \tag{4}$$
となる。ここで、初期条件を代入して,$x(t)$ の特殊解
$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{v_0}{\gamma}e^{-\gamma 0} + c \\ \to c &= \frac{v_0}{\gamma} \\ \to x(t) &= \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \end{aligned} \tag{5}$$
が得られる。

（備考：この問題には重力が作用していることを意味する表現（鉛直、水平、重力など）はないので、重力は考慮しなくてよい。）