(重力の下における放物運動)projectile-qa050816.tex

質量 m の物体を地上の 1 点から水平面と角 $\theta_0 (0 < \theta_0 < \pi/2)$ の方向に初速度 v_0 で時刻 $t = 0$ に投げるとき、物体はどのような運動をするか。空気抵抗は無視する。また重力の加速度の大きさを g とする。以下の問いに答えよ。

1. 水平面を xy 面として、$+z$ 軸（$= z$ 軸の正の向）を鉛直上方にとり、物体を原点 O から $+x$ 軸の方向に投げるとする。この場合の運動方程式の x, y, z 成分を記せ。
2. 前問の運動方程式を時間について積分し、任意の時刻 t における速度ベクトルの x, y, z 成分を v_x, v_y, v_z 成分を求めよ。
3. 前問の速度ベクトルの x, y, z 成分を時間について積分し、任意の時刻 t における位置ベクトルの x, y, z 成分を求めよ。
4. 前問の結果の中で、位置ベクトルの x, z 成分の時間依存性の式から時間 t を消去して、軌道の式を求め、それはどのような曲線を表すか述べよ。

(解答例)

1. 力は鉛直下向きに働く重力のみであるから、運動方程式の x, y, z 成分はそれぞれ、
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = 0,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \tag{1}$$
となる。
2. 前問の結果を時間 $t = 0$ から t まで積分して、初速度の x, y, z 成分をそれぞれ代入すると次の関係式が得られる。
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \int_0^t \frac{d^2x}{dt^2}dx = \mathrm{constant} = v_0\cos\theta_0, \tag{2}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \int_0^t \frac{d^2y}{dt^2}dy = \mathrm{constant} = 0, \tag{3}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \int_0^t \frac{d^2z}{dt^2}dz = -gt + \mathrm{constant} = -gt + v_0\sin\theta_0. \tag{4}$$
3. 前問のそれぞれの結果を時間 $t = 0$ から t まで積分して、物体ははじめ原点にあったので
$$x = = \int_0^t \frac{dx}{dt}dx = (v_0\cos\theta_0)t, \tag{5}$$
$$y = \int_0^t \frac{dy}{dt}dy = \mathrm{constant} = 0, \tag{6}$$
$$z = \int_0^t \frac{dz}{dt}dz = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta_0)t \tag{7}$$
となる。
4. 前問の結果、式（5）より得られる $t = x/(v_0\cos\theta_0)$ を式（7）に代入すると、
$$z = -\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2 + (\tan\theta_0)x \tag{8}$$
が得られる。この式は上に凸の放物線を表す。