(角運動量による単振り子の運動方程式の導出)pendulum-qa050802.tex

質量 m の重りを糸（伸縮しないとする）で吊るし、糸の上端を天井に固定し、鉛直面内で振動させる装置を単振子という。鉛直面を xy 面、鉛直下向きを x 軸、水平右向きを y 軸に選び、重力加速度を g、糸の長さを r とする。糸の長さは変化しないとする。任意の時刻における重りの鉛直となす角度を θ として次の問いに答えよ。

1. 角運動量の z 成分 ℓ_z を r, m, θ で表わす式を求めよ。
2. 力のモーメント（またはトルク）の z 成分 N_z を $r, m, \theta,\ g$ で表わす式を求めよ。
3. 角運動量の運動方程式の z 成分を (極座標で) で記せ。
4. 角度 θ が微小の場合に、一般解を求めよ。

(解答例)

1. 角運動量の定義において直交直線座標から極座標に変換する。

$$\begin{aligned} \ell_z &\equiv x\ mv_y - y\ mv_x && (1)\\ x &= r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, && (2)\\ v_x &= \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,\ v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta. && (3) \end{aligned}$$

以上の結果を代入してを角運動量（の z 成分）の極座標表示を得る。

$$\begin{aligned} \ell_z &= m[r\cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) - r\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)] \\ &= mr^2\dot{\theta} && (4) \end{aligned}$$

2. 重りに働く力は重力と糸の張力である。しかし、張力は回転軸向きに向かい、力のモーメントに寄与しない。したがって、重力だけが力のモーメントに寄与し、しかも、今の場合、重力は x 成分しかもたないので力のモーメントの z 成分は

$$\begin{aligned} N_z &= [x(m\boldsymbol{g})_y - y(m\boldsymbol{g})_x] \\ &= -mgr\sin\theta && (5) \end{aligned}$$

となる。（この符号は角度を減少させる向きであると解釈できる。）

3. 角運動量の時間微分が力のモーメントに等しいから、前問の結果を代入して

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_z}{dt} &= N_z \\ \rightarrow mr^2\ddot{\theta} &= -mgr\sin\theta && (6) \end{aligned}$$

を得る。

4. また微小振幅 (微小角度）の場合

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{r}\sin\theta \\ \sin\theta &\approx \theta \\ \rightarrow \quad \text{一般解：}\theta &= \theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{r}}t + \delta), (\theta_0, \delta : \text{積分定数}) && (7) \end{aligned}$$