(極座標系における単振り子の運動方程式)pendulmn-polar-coord-qa080701a.tex

鉛直面内に置かれた長さ r の糸の先端に質量 m の粒子がつけてある。もうひとつの先端は天井に固定してあるとする。天井の一点を原点、鉛直下向きを x 軸、水平右向きを y 軸として、単振子の運動方程式を次の手順で求めよ。重力の加速度の大きさを g とする。

1. この粒子の位置 (x,y) が初めの鉛直線から角度 θ をなすとき, 加速度の動径方向成分 $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$、方位角方向の成分 $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ の、半径一定の場合を記せ。
2. 糸の張力の大きさが S として、この単振り子の運動方程式 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ の動径方向成分 $ma_r=F_r$, 方位角方向の成分 $ma_\theta=F_\theta$ を記せ。
3. 前問の結果を用いて、単振子の角度 θ についての運動方程式を求めよ。
4. この単振子の運動方程式の微小振動の場合の一般解を記せ。
5. 張力の大きさ S の時間変化を表す関係式を求めよ。

(解答例)

1. 題意より、半径は一定,$\dot{r}=\ddot{r}=0$ であるから $a_r=-r\dot{\theta}^2,\ a_\theta=r\ddot{\theta}$ となる。
2. この単振り子の運動方程式 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ の動径方向成分 $ma_r=F_r$ は、前問の結果を用いると

$$-mr\dot{\theta}^2 \;=\; -S+mg\cos\theta \tag{1}$$

   と表される。同様に、方位角方向の成分 $ma_\theta=F_\theta$ は次のようになる：

$$mr\ddot{\theta} \;=\; -mg\sin\theta. \tag{2}$$

3. 前問の結果 (2) を用いて、単振子の角度 θ についての運動方程式は

$$\ddot{\theta} \;=\; -\frac{g}{r}\sin\theta. \tag{3}$$

4. この単振子の運動方程式の微小振動の場合 $(|\theta|\ll 1,\ \sin\theta\approx\theta)$ の微分方程式、$\ddot{\theta}\approx-(g/r)\theta$ の一般解は、積分定数に対する適当な記号 θ_0,δ を用いると次のようになる。

$$\theta(t) \;=\; \theta_0\cos\Big(\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot t+\delta\Big). \tag{4}$$

5. 張力の大きさ S の時間変化を表す関係式は、式 (1) を微小振動の場合に適用して、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} S \;&=\; mg\cos\theta+mr\dot{\theta}^2 \\ &\approx\; mg+mg\theta_0^2\sin^2\Big(\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot t+\delta\Big) \qquad (5) \end{aligned}$$

   ここで、θ の１次までを考慮する近似式,$\sin\theta\approx\theta,\cos\theta\approx 1$ を用いた。