

(モース・ポテンシャル (Morse potential) における安定なつりあい点の周りの微小振動)Morse-potential-qa080703.tex

x 軸上を運動する粒子 (質量 m) に, ポテンシャル (Morse(モース)ポテンシャル)

$$U(x) = U_0 [e^{-2ax} - 2e^{-ax}], \quad (U_0 > 0, a > 0) \quad (1)$$

が働いている。(原子間相互作用のポテンシャルのひとつとして提案された。)

1. 力のつりあい点 (ポテンシャルの1次微分がゼロとなる点) を求めよ。
2. そのつりあい点は安定点かどうかを調べよ。
3. 安定点の場合には、その点の周りでポテンシャル関数を2次までのテーラー展開近似を行って、微小振動の角振動数を求めよ。(ヒント: 関数 $f(x)$ の点 $x = 0$ の周りにおけるテーラー展開とは $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \dots$ である。)
4. (参考: 曲線の概略を描き、微小変位を仮定すると、フックの力の微視的な起源についてのひとつの説明になりうる。)

(解答例)

1.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= -2a U_0 e^{-2ax} (1 - e^{ax}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

より、 $x = 0$ で関数は極値となる。

2.

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} &= 2a^2 U_0 e^{-2ax} (2 - e^{ax}) \\ \rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 2a^2 U_0 > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

ゆえに、2階微分が正で、下に凸のポテンシャルであるから、 $x = 0$ は安定なつりあい点である。

3.

$$\begin{aligned} U(x) &\approx U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2!}U''(0)x^2 \\ &= -U_0 + \frac{1}{2}(2a^2U_0)x^2. \end{aligned} \quad (4)$$

したがって、バネ定数 $k = 2a^2U_0$ のバネのポテンシャルに相当し、その際の微小振動の角速度 $\omega = a\sqrt{2U_0/m}$ となり、周期 T は

$$\begin{aligned} T &= 2\pi/\omega \\ &= \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{2m}{U_0}}. \end{aligned} \quad (5)$$

4.