

つりあいの位置からの変位 x に比例する復元力 ($F(x) = -kx; k = \text{constant}$) を受けている粒子 (質量 m) について, 時間を t とすれば次の運動方程式が成立する。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (1)$$

次の問いに答えよ。定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えてよい。

1. この微分方程式の一般解を書き、それがこの微分方程式を満たすことを示せ。ただし、積分定数はことわった上で、導入してよい。
2. 初期条件 ($t = 0$ で、変位が $x_0 (> 0)$, 速度が $v_0 (> 0)$) の場合の特殊解を求めよ。

(解答例)

1. 一般解は、次の例のように、いくつかの表現が可能である。

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (A, \alpha : \text{積分定数}) \quad (2)$$

$$x = A \sin(\omega_0 t + \beta), \quad (A, \beta : \text{積分定数}) \quad (3)$$

$$x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (A, B : \text{積分定数}). \quad (4)$$

一般解 (2) がもとの微分方程式を満たすかどうかを調べる。

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (6)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (7)$$

$$= -\omega_0^2 x \quad (8)$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (9)$$

他の一般解も、ほぼ同様にして、もとの微分方程式を満たすことが分かる。(各自確認せよ。)

2. 初期条件を一般解に代入して、積分定数を求める。

$$x_0 = A \cos \alpha, \quad (10)$$

$$v_0 = -A\omega_0 \sin \alpha. \quad (11)$$

これらの式より

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = A^2, \quad (12)$$

$$\rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (13)$$

$$-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} = \tan \alpha \tag{14}$$

$$\rightarrow x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega_0 t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{15}$$

$$\left[\alpha \equiv \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right) \right] \tag{16}$$