

つりあいの位置からの変位 x に比例する復元力 ($F(x) = -kx$; $k = \text{constant}$) を受けている粒子 (質量 m) について, 時間を t とすれば次の運動方程式が成立する。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (1)$$

次の問いに答えよ。定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えてよい。

1. この微分方程式の一般解を書き、それがこの微分方程式を満たすことを示せ。ただし、積分定数はことわった上で、導入してよい。
2. 初期条件 ($t = 0$ で、変位が $x_0 (> 0)$, 速度が 0) の場合の特殊解を求めよ。

(解答例)

1. 一般解は、次の例のように、いくつかの表現が可能である。

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (A, \alpha : \text{積分定数}) \quad (2)$$

$$x = A \sin(\omega_0 t + \beta), \quad (A, \beta : \text{積分定数}) \quad (3)$$

$$x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (A, B : \text{積分定数}) \quad (4)$$

一般解 (2) がもとの微分方程式を満たすかどうかを調べる。

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (6)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (7)$$

$$= -\omega_0^2 x \quad (8)$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (9)$$

他の一般解も、ほぼ同様にして、もとの微分方程式を満たすことが分かる。(各自確認せよ。)

2. 初期条件を一般解に代入して、積分定数を求める。

$$x_0 = A \cos \alpha, \quad (10)$$

$$0 = -A\omega_0 \sin \alpha. \quad (11)$$

式 (11) より, 三角関数の位相の周期性を考えると、 $\alpha = 0, \pi$ という二つの場合を調べればよい。

- (a) $\alpha = 0$ の場合。式 (10) に代入して、次の特殊解が得られる。

$$A = x_0, \quad (12)$$

$$\rightarrow x = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (13)$$

(b) $\alpha = \pi$ の場合。式 (10) に代入して特殊解

$$A = -x_0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x &= -x_0 \cos(\omega_0 t + \pi) \\ &= x_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。

結局、いずれの場合も同じ特殊解が得られる。