

バネの自然長からの変位 x に比例する復元力 ($F(x) = -kx$; $k = \text{constant}$) をもつバネの先端に質量 m の粒子を結び、鉛直下方にぶら下げる。鉛直下方に x 軸をとる。また、重力の加速度を g とする。定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えてよい。

1. 運動方程式を記せ。
2. この微分方程式の一般解を求めよ。積分定数はことわった上で、導入してよい。
3. 初期条件 ($t = 0$ で、位置が 0, 速度が 0) の場合の特殊解を求めよ。

(解答例)

1.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg. \quad (1)$$

2. 式 (1) は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \left(x - \frac{mg}{k} \right) \quad (2)$$

と書き直せる。ここで、

$$x - \frac{mg}{k} \equiv X \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dt^2}. \quad (3)$$

これより、式 (2) は

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX \quad (4)$$

と書き直せる。この微分方程式の一般解は、次の例のように表せる。

$$X = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) \quad (A, \alpha : \text{積分定数}) \quad (5)$$

$$\rightarrow x = \frac{mg}{k} + A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) \quad (6)$$

3. 初期条件を一般解に代入して、特殊解を求める。

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(0) \\ &= -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha \rightarrow \alpha = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= x(0) \\ &= \frac{mg}{k} + A \cos 0 \rightarrow A = -\frac{mg}{k} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{mg}{k}\right) \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]. \quad (9)$$

(備考：積分定数 α の値として、 π も可能である。しかし、その場合には A の符号も変わり、最終的には同じ結果となることを確かめて見よ。)