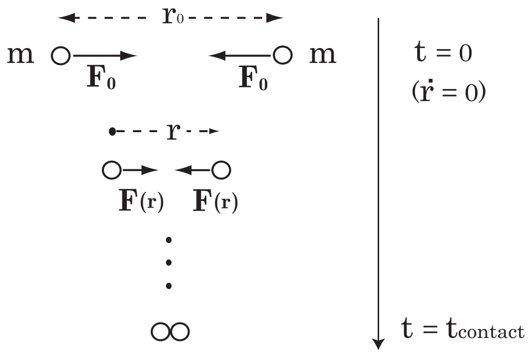
(２つ物体間の万有引力)graviation-collapse050530.TEX

○２つの物体がある距離を離れて、万有引力 (重力) のみで接触するまでの時間の計算。



換算質量 μ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} &\equiv \frac{1}{m}+\frac{1}{m} \\
\rightarrow \quad \mu &= \frac{m}{2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

相対運動の (動径方向の) 運動方程式より

$$
\mu \cdot \ddot{r} = -G\frac{m \cdot m}{r^2} \qquad (2)
$$

$r = r(t)$, (G : 重力定数)

式 (2) と式 (1) より $\dot{r}$ を両辺にかけて

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{r}\cdot\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}\dot{r} \\
&\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r^2}}{4}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Gm}{r}\right) \\
&\rightarrow \quad \frac{\dot{r^2}}{4} = \frac{Gm}{r} + \text{constant.}
\end{aligned}
$$

$t = 0$ で $\dot{r} = 0, r = r_0$ を用いて

$$
\frac{\dot{r^2}}{4} = Gm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (3)
$$

力学的エネルギー保存則より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + (-)G\frac{m \cdot m}{r} = -G\frac{m\ m}{r_0} \\
&\rightarrow \quad \frac{1}{4}\dot{r^2} - G\frac{m}{r} = -G\frac{m}{r_0} \\
&\rightarrow \quad \frac{\dot{r^2}}{4} = Gm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

式 (3) または式 (4) より

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \frac{1}{4Gm}\frac{(r\cdot\dot{r})^2}{r_0} &= \left[\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \\
&= (-)\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{r_0}\right)^2 + \frac{1}{4} \\
\therefore \quad \left[\frac{r\ \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}}\right]^2 &+ \left[2\left(\frac{r}{r_0}-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

(5) の一般解は次のように表すことができる

$$\frac{r\ \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}} = \pm\sin(\theta+\alpha), \qquad (6) \qquad\qquad 2\left(\frac{r}{r_0}-\frac{1}{2}\right) = \pm\cos(\theta+\alpha). \qquad (7)$$

ただし，α : 定数 ， $\theta \equiv \theta(t)$.

初期条件では ($t=0$ で $r=r_0>0, \dot{r}=0$) を考慮すると $t=0$ で $\theta=0$ として、式 (7) より

$$2\left(\frac{r_0}{r_0}-\frac{1}{2}\right) = \pm\cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0\ ,\ \cos\text{の符号は上符号を採用する}.$$

今の場合、$r>0, \dot{r}<0$ であると考えてよいから式 (6) の符号はマイナス符号を採用する

$$\therefore\ \frac{r\ \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}} = -\sin\theta, \qquad (8) \qquad\qquad r(t)\ ,\ \dot{r}(t) \ \rightleftharpoons\ \theta(t)$$

$$\therefore\ 2\left(\frac{r}{r_0}-\frac{1}{2}\right) = \pm\cos\theta, \qquad (9) \qquad \longrightarrow\ r = \frac{r_0}{2}(1+\cos\theta). \qquad (10)$$

接触するときは $r=0$、式 (8) より $\theta=\pi$ となる。

$\theta=0$ から $\theta=\pi$ までの経過時間を $t=t_{\text{contact}}$ とすると

$$\begin{aligned} t_{contact} &\equiv \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} dt \qquad (\theta=\theta(t) \ \rightarrow\ t=t(\theta)) \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)d\theta. \end{aligned} \qquad (11)$$

ここで、式 (10) を微分して、式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r_0}{2}(-1)\dot{\theta}\sin\theta = \frac{r_0}{2}\times\dot{\theta}\times\frac{r\ \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}}, \\ \rightarrow\quad \dot{\theta} &= \frac{2}{r}\sqrt{\frac{Gm}{r_0}}, \\ \rightarrow\quad \left(\frac{dt}{d\theta}\right) &= \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{\frac{r_0}{2}(1+\cos\theta)\sqrt{r_0}}{2\sqrt{Gm}}. \end{aligned} \qquad (12)$$

式 (12) を式 (11) に代入

$$\begin{aligned} t_{\text{contact}} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos\theta)d\theta, \\ \therefore\ t_{\text{contact}} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}\pi. \end{aligned} \qquad (13)$$

ここで、

$$r_0 = 1\text{m}\ ,\ m = 100\text{kg}\ ,\ G = 6.672 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2),$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}
t_{\text{contact}} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(1\text{m})^3}{6.672\times 10^{-11}\times \text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}\times 100\text{kg}}}\times 3.14 \\
&= \frac{3.14}{4}\times\sqrt{\frac{10^8}{0.6672}}\ \ \text{s} \\
&= \frac{3.14\times 10^4}{4\times\sqrt{0.6672}}\ \ \text{sec} \\
&\simeq 9610\ \ \text{sec} \simeq 160\ \ \text{min} = 2\ \ \text{hours}\ \ 40\ \ \text{min.}
\end{aligned}$$

(参考)　自己重力系としての宇宙の崩壊時間
宇宙全体の質量を M 、初速度ゼロで、半径 r_0 の大きさの球として、重力崩壊するまでの時間を t_{kelvin} とすると

$$\begin{aligned}
t_{\text{kelvin}} &= \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} \quad \leftarrow \quad \frac{1}{2}\dot{r}^2 = G\ M\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}, \qquad\qquad \rho_0 \equiv \frac{M}{\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3\right)} : \text{平均密度}
\end{aligned}$$

従って、最初の大きさに依らず、平均密度 ρ_0 ($1/\sqrt{\rho_0}$ に比例) に依存する。

$$\begin{aligned}
\text{(隣接する恒星までの平均間隔)} &\simeq 5\times 10^5\ \ \text{AU} \\
&= 5\times 10^5\times(1.50\times 10^{11}\ \ \text{m}) \\
&= 7.5\times 10^{16}\ \ \text{m} \quad \Longrightarrow \quad r_0\text{とする},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \qquad\qquad (M_0 : \text{太陽の質量}) \\
&\simeq \frac{3\times 2\times 10^{30}\ \ \text{kg}}{4\pi\times(7.5\times 10^{16}\ \ \text{m})^3} \simeq 1.1\times 10^{-21}\ \ \text{kg/m}^3 (\simeq 1.1\times 10^{-24}\text{g/cm}^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad t_{\text{kelvin}} &= \sqrt{\frac{3\times 3.14}{32\times 6.672\times 10^{-11}\ m^3\cdot\text{kg}^{-2}\cdot s^{-2}\times 1.1\times 10^{-21}\ \text{kg}\cdot m^{-3}}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3\times 3.14}{32\times 6.672\times 1.1}\right)\times 10^{32}}\ \ \text{sec} \\
&\simeq (0.200)\times 10^{16}\ \ \text{sec} \simeq \frac{0.200}{0.315}\times 10^8\ \ \text{year} \qquad (1\text{year} = 365\text{day} = 0.315\times 10^8\text{s}) \\
&= 0.635\times 10^8\ \ \text{year} \quad \Rightarrow \quad 6350\,\text{万年}.
\end{aligned}$$