(安定点のまわりの微小振動 energy-stability-xsum-qa060620a.tex)

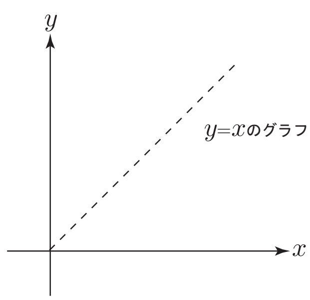
x 軸上を運動する粒子 (質量 m) に次のような力のポテンシャル

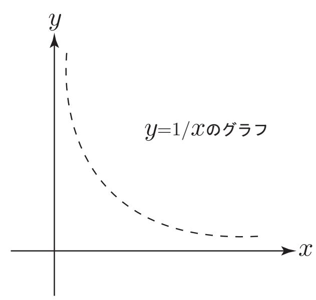
$$U(x) = U_0 \cdot (\frac{x_0}{x} + \frac{x}{x_0}), \quad (U_0 > 0, x_0 > 0, 一定) \tag{1}$$

が働いて、$x > 0$ の領域で運動しているとする。

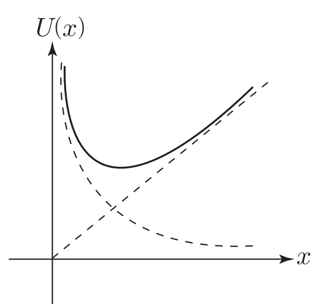
1. このポテンシャルの概略を図示せよ。
2. 力のつりあい点を求めよ。
3. つりあい点が安定点かどうかを調べ、安定点の場合にはその点の周りの微小振動の角振動数と周期を求めよ。

(解答例)





1. だから、$U(x)$ のグラフは下図のようになる。



2. ポテンシャル $U(x)$ が与えられたとき、対応する保存力は $F(x) = -dU/dx$ と表されるから、つりあい点の x 座標は次式を満たす x である。

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dU(x)}{dx} \\ &= U_0\ x_0 \frac{1}{x^2} - \frac{U_0}{x_0} \\ \to x &= x_0. \end{aligned} \tag{2}$$

3. 安定性は位置座標の関数としてポテンシャルの 2 階微分係数の符号で決まる。

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \frac{2U_0}{x_0^2} > 0 \tag{3}$$

グラフは下に凸となるので、つりあい点 $x = x_0$ は安定なつりあい点である。

4.

題意により、ポテンシャル関数を安定なつりあい点 $x = x_0$ の周りでテーラー展開して、第 3 項までで近似すると

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_0 + x - x_0) \\ &\approx U(x_0) + \left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{2U_0}{x_0^2}\right)(x - x_0)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

となる。ここで、右辺の第 2 項を、質量 m、バネの強さ k の、安定なつりあい点 $x = x_0$ の周り単振動（調和振動）のポテンシャル項 $(k(x - x_0)^2/2)$ と見なすと、角振動数 ω_0 と周期 T は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{mx_0^2}} \tag{5}$$

$$\to T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2mx_0^2}{U_0}} \tag{6}$$

となる。