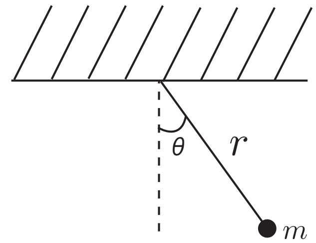
(力学的エネルギー保存則からの単振子の運動方程式の導出)

energy-pedulumn-qa060609a.tex

鉛直面内に置かれた長さ r の糸の先端に質量 m の粒子がつけてある。もうひとつの先端は天井に固定してあるとする。単振子の運動方程式を次の手順で求めよ。ただし、初めに与えられた力学的エネルギーを E として, 重力の加速度の大きさを g とせよ。



1. この粒子の位置が初めの鉛直線から角度 θ、円周方向の速さ v のときの　力学的エネルギー保存則を表わす関係式を記せ。
2. 今の場合、r,θ、v の間に成り立つ関係式を記せ。
3. 力学的エネルギー保存則を表わす関係式を時間について微分して、前問の結果を用いて、単振子の運動方程式を導出せよ。
4. この単振子の運動方程式の微小振動の場合の一般解を記せ。

(解答例)

1. 位置エネルギーの基準点を最下点に選べば、力学的エネルギー保存則の関係式は
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr(1-\cos\theta) = E. \tag{1}$$
2.
$$v = r\dot{\theta}. \tag{2}$$
3. 式 (1) を微分すると
$$mv\dot{v} + mgr(-1)\times(-1)\times\sin\theta\dot{\theta} = 0 \tag{3}$$
が得られる。式（2）と $\dot{v} = r\ddot{\theta}$ を (3) に代入して、整理すると
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin\theta. \tag{4}$$
となる。
4. 微小振動の場合には $\sin\theta \approx \theta$ であるから運動方程式は
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\theta \tag{5}$$
となるので、単振動と同じように、その一般解は
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{r}}t+\alpha), \quad (\theta_0, \alpha; \mathrm{constant}) \tag{6}$$
となる。