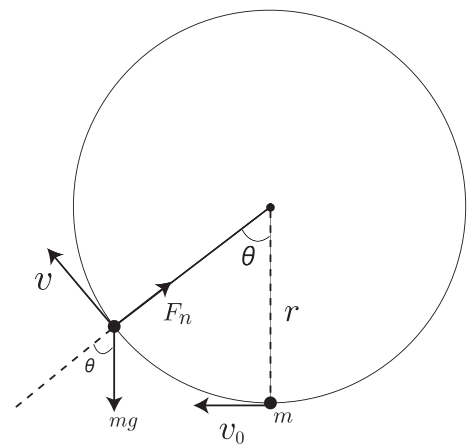
(鉛直面内の円運動)filename=energy-circularmotion-qa080613.tex

鉛直面内に置かれた半径 r のなめらかな円の内側を動く質量 m の粒子がある。この粒子に水平方向に初速度 v_0 を与えたとする。重力加速度の大きさを g とする。

1. この粒子の位置が初めの鉛直線からなす角度 θ、円周方向の速さ v、円からの垂直抗力の大きさが F_n のとき、法線方向の運動方程式を記せ。
2. この場合の力学的エネルギー保存則の関係式を記せ。
3. 垂直抗力の大きさ F_n を m, r, v_0, θ, g で表わす関係式を求めよ。
4. この粒子が円から離れないための初速度が満たすべき条件を求めよ。



(解答例)

1. 運動方程式（ベクトル形式の方程式）の法線成分においては力、加速度の符号は中心向きが正値であることに留意して、
$$m\frac{v^2}{r} = F_n - mg\cos\theta. \qquad (1)$$
2. 位置エネルギーの基準点を最下点に選べば、力学的エネルギー保存則は
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgr(1-\cos\theta). \qquad (2)$$
3. 式 (1) より
$$mv^2 = rF_n - mgr\cos\theta. \qquad (3)$$
式 (3) を式 (2) に代入して
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}(rF_n - mgr\cos\theta) + mgr(1-\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}rF_n + mgr - \frac{3}{2}mgr\cos\theta. \qquad (4) \end{aligned}$$
よって
$$F_n = m\frac{v_0^2}{r} + 3mg\ \cos\theta - 2mg. \qquad (5)$$
4. 円から離れないためには、角度範囲 ($0 \le \theta \le 2\pi, -1 \le \cos\theta \le 1$) で, 右辺の値が最小になる $\theta = \pi$ に対しても、垂直抗力 F_n がプラスでなければならないから　$v_0 > \sqrt{5gr}$.