エネルギーと仕事 filename=energywork090615.tex

1 エネルギーとは何かーその重要性と広がりー

われわれが社会生活において「エネルギー」(energy) という言葉を使用するときに何を意味しているか考えてみよう。大きく分類すれば次の 4 つになる。

1. 活動を意味する「エネルギー」
2. 力または能力を意味する「エネルギー」
3. 経済「エネルギー」: 動力や燃料を総称する用語としての「エネルギー」
4. 物理学を含む科学、技術の多くの分野において定義される「エネルギー」

科学、技術の多くの分野において定義される「エネルギー」という用語に限っても、非常に幅広く使われていて、明確な定義は必ずしも容易ではない。

ニュートンの運動方程式を使って、いろいろな運動を解析することができる。しかし、多くの場合、予め知ることのできないような詳しい情報が必要となり、実際の解析は難しい。

17 世紀以来、科学者たちや技術者たちは運動または物質的な変化を解析するのに非常に強力な概念と手法（エネルギーの概念の拡張、相互転換と関連する保存則）に気がついた。この手法は、力学的運動に関係しないような化学反応、地質学的変動、生物学的機能などにも拡張できることが徐々にわかってきた。

2 運動エネルギーと仕事 (1 次元)

なぜ運動エネルギーの式に (1/2) という因子がつくのか？

エネルギーとは、ひとつまたは複数の物体の状態を表すスカラー量（scalar quantity）である。スカラー量とその符号を含む大きさで定まる量であり、空間的方向には依存しない量である。対照的に、力、速度などのベクトル量は、大きさと向きを指定して定まる量である。　このため、エネルギーの変化または保存についての関係式（法則）は、力のように向きを考慮する必要がなく、実際的には著しい利点がある、

まず、エネルギーの形態のひとつである運動エネルギーに焦点をしぼり、その定義と性質を議論する。質量 m、速さ v の物体の運動エネルギー (kinetic energy) K は

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.1}$$

と定義される。この定義式になぜ因子 (1/2) がつくのか不思議に感じられるかもし

れないが、その理由は仕事エネルギー定理の議論の際に明らかになる。国際単位系では運動エネルギーの単位は 1J(joule) $= \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$ となる。

2.1 外力が一つの物体にする仕事と仕事率 (1 次元)

「仕事」は日常用語としては、種々の意味で使用されているが、ここでは力学的な仕事を考える。

2.1.1 外力が一定の場合の仕事と仕事率 (1 次元)

ここでは 1 次元運動の場合、すなわち x 軸方向の運動を考える。位置座標、速度、力が右向きのとき、正の値、左向きのときを負の値とすれば、方向だけではなく向きも指定できる。もっとも単純な場合として、外力の大きさが一定（F）で物体の変位が外力と同じ方向で大きさが s の場合、この力が物体にする力学的な仕事 W（work）は

$$W \equiv Fs \qquad [(\text{仕事}) = (\text{力}) \times (\text{変位})] \tag{2.2}$$

で定義される。国際単位系では距離を 1m、力を 1N(= Newton) とすれば、仕事の単位は
1J(joule) $= \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$ となる。仕事をする能力をエネルギー（energy）をもつという。従って、仕事とエネルギーの次元（dimension）と単位（SI 単位）は等しく、

$$[W] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{J}(=\text{joule}) \equiv \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}. \tag{2.4}$$

である。ここで、次元についての文字式において、L は長さ (length), T は時間 (time), M は質量 (mass）を表す。

注意：

1. ここでは、物体は粒子状（質点）でなければならない。すなわち、物体は頑丈で、物体の全ての部分は同じ方向に一緒に運動するものとする。
2. 外力の向きと変位の向きが同じ場合には W はプラスの値で、外力による仕事が実際になされる。力の向きと変位の向きが逆の場合には W はマイナスの値で、外力による仕事が実際になされるのではなく、物体が $|W|$ だけの仕事を外界に対して行うと解釈する。
3. 複数の外力による正味の仕事はそれぞれの外力による仕事の代数和（符号を考慮した和）である。これは、エネルギー、仕事がスカラー量であるためである。

2.1.2 位置とともに変化する外力が物体にする仕事と仕事率 (1 次元)

ある物体に、位置により変化する外力 F が位置 x_1 から x_2 まで働く場合に（力学的）**仕事** W は次式で定義される。

$$W \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx. \tag{2.5}$$

この定義式は外力が一定の場合の仕事の定義を含むことは明らかであろう。さらに、この式の（右辺の）値は一般にはプラスだけではなく、ゼロまたはマイナスの値にもなりうることに注意する。外力のする仕事の値がマイナスの場合には、外力が仕事をされること、すなわち、その絶対値の大きさの仕事を物体が外界に対して行うと解釈する。

単位時間あたりの仕事を **仕事率（power)** という。仕事率 P は次のように定義される。

$$\begin{aligned} P &\equiv \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= Fv. \end{aligned} \tag{2.6}$$

仕事率の次元（単位）は次のようになる。

$$\begin{aligned} [P] &= [F][v] \\ 1\mathrm{watt} &\equiv \mathrm{N \cdot m \cdot s^{-1}} = \mathrm{J \cdot s^{-1}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

通常、仕事率の単位は w（ワット）が使用されるが、仕事の文字式 W と混同しやすくなるので、ここでは英語つづりの watt を用いた。

注意：外力が物体に行う仕事は一般には経路にも依存すること(一次元の解析) 例:
摩擦力による仕事：
地球表面付近における重力のする仕事を考える。地球表面付近における重力は鉛直下向きであるから、ある位置から質量 m の物体を鉛直上向きに高さ h まで投げ上げ、元の位置まで落下する間に重力のする仕事を計算してみよう。重力の加速度の大きさを g とすると、上昇時の重力する仕事は $-mgh$ であるが、下降時に重力のする仕事は mgh であり、全体として相殺される。鉛直にではなく、斜め上方の投射され、落下する場合にも、事情は同じである。すなわち、地表付近の重力による仕事は位置のみの関数であり、経路には依存しない。

しかし、摩擦力のように、速度に依存する場合には、その力が物体に行う仕事の値は経路にも依存する。例えば、一定の摩擦力 F が働いているとき、点 A($x = x_{\mathrm{A}}$) から点 B($x = x_{\mathrm{B}} \geq x_{\mathrm{A}}$) まで、、さらに、点 C($x = x_{\mathrm{C}} \leq x_{\mathrm{A}}$) まで移動する場合、摩擦力により行われる仕事 W は

$$W = F \times (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) + F \times |x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{C}}| \tag{2.8}$$

となり、初めの位置と終わりの位置、$x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{C}}$ だけではなく、途中の経路 x_{B} にも依存する。

2.2　仕事・エネルギー定理（1 次元の解析）

質量 m の粒子の 速度が v で、外力 F のとき運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{2.9}$$

が任意の時刻において成立する。この両辺に速度（の x 成分）$dx/dt(=v)$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F(\frac{dx}{dt}) \tag{2.10}$$

となる。この式の左辺を書き直すために、変数 x の関数 $f(x)$ の 2 乗の微分係数を計算する。

$$\frac{df^2(x)}{dx} = \frac{d[f(x)f(x)]}{dx} = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x). \tag{2.11}$$

ここで、粒子の速度 v は一般には時々刻々変化するので、時間 t の関数と考えられる。式（2.11）において、変数を x から t に入れ替え、関数を $f(x)$ から $v(t)$ に入れ替え、質量 m をかけると, 左辺は

$$mv\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) \tag{2.12}$$

となる。この結果を式（2.10）に代入すると

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}mv^2] = F\cdot(\frac{dx}{dt}) \tag{2.13}$$

が得られる。この関係式を**エネルギーの方程式（equation of energy）**という。この方程式は（ある時刻における）運動エネルギーの時間変化率は外力のする仕事率に等しいことを意味している。さらに、時間について、t_1 から t_2 まで積分する。ここで

$$\text{左辺} = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{2.14}$$

$$\text{右辺} = \int_{t_1}^{t_2}F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2}Fdx, \tag{2.15}$$

$$v_1 \equiv v(t_1), v_2 \equiv v(t_2), \tag{2.16}$$

$$x_1 \equiv x(t_1), x_2 \equiv x(t_2) \tag{2.17}$$

となり、**仕事・エネルギー定理 (work-energy theorem)**

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2}Fdx. \tag{2.18}$$

が得られる。この式は次のように解釈できる。力学的仕事は、力が作用している物体への、エネルギーの移動である。物体へエネルギーが移動した場合の仕事の値は正であり、物体からエネルギーが移動した場合の仕事の値は負である。

ここで、質量 m, 速さ v の物体の持つ運動エネルギー (kinetic energy)K を $K \equiv mv^2/2$ と定義する理由は用意に理解されるであろう。

仕事・エネルギー定理 (work-energy theorem) は, 粒子の運動エネルギーの変化量はその間に外力が粒子にした仕事に等しいことを意味する。この定理は力の種類にかかわらず、複数の力が働く場合にも成立する。

運動エネルギーは速さの 2 乗に比例することと速度の向きには依存しないこと (スカラー量であること）に注意する。すなわち、質量の小さい物体でも高速の場合には運動エネルギーは非常に大きくなる。また、大小の隕石など微小天体の典型的速度が秒速数キロメートル以上なので、その運動エネルギーは莫大になり、衝突の際の大きな衝撃を与える。（運動エネルギーの定義式になぜ因子 1/2 がつくのか不思議に感じた人も少なくないかもしれないが、仕事・エネルギー定理の導出の過程でその理由は明らかであろう。）

運動エネルギーの意味を仕事・エネルギー定理を用いて考えて見る。

$$
\begin{aligned}
0 - \frac{1}{2}mv^2 &= \int_{x_1}^{x_2} F dx \\
\rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 &= \int_{x_1}^{x_2} (-F) dx. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

ここで、$-F$ は外力の反作用（反力）であり、物体が他に及ぼす力である。この結果は、質量 m, 速度（または速さ）v の物体は静止するまでに、$K = mv^2/2$ だけの仕事を他の物体にすることができることを意味する。

ここで、運動エネルギーと仕事の意味についてひとつ注意しておく。エネルギーの主要な形態のひとつである、ある物体の運動エネルギーそのものが（その物体以外の）他の物体に行う仕事ではなく、運動エネルギーの変化分が外部への仕事に転化できること。この点は慣性の法則にしたがって等速度運動 (等速直線運動）している場合には外部から仕事をされていないこと、および物体は外部に仕事をしないことと整合的である。

2.3 保存力、ポテンシャルと力学的エネルギー保存 (1 次元)

ここでは、エネルギーの二つ目の形態であるポテンシャル・エネルギーの定義とその性質について議論する。ポテンシャル・エネルギーは、系（system, または対象とする系）の空間的配置または系を構成する複数の物体の相対的配置に関するエネルギーである。

物理学では、力を保存力（conservative force）と非保存力（non-conservative force）に分類する。保存力と分類される力のする仕事はエネルギーの一つの形態として蓄えられ、後に使用されることができることが重要な特徴である。

2.3.1　保存力、ポテンシャルと力学的エネルギー保存則 (1 次元の解析）

すでに議論したように、力のする仕事は、物体の最初と最後の位置だけではなく、一般には経路にも依存する。そこで、ある力が, 任意の位置 x から基準点 x_0 までの間に行う仕事が、途中の経路によらず、位置 x だけに依存し、あるスカラー関数 $U(x)$ として表される場合に、その力を**保存力（conservative force）**といい、ここでは $F^{\rm c}$ と表す。保存力の定義より

$$
\begin{aligned}
U(x) &\equiv \int_x^{x_0} F^{\rm c}(x')dx' && (2.1)\\
&= -\int_{x_0}^{x} F^{\rm c}(x')dx'. && (2.2)
\end{aligned}
$$

このとき $U(x)$ を**位置エネルギー, ポテンシャル・エネルギー**, あるいは単に**ポテンシャル（potential）**という。後述するように、ポテンシャル・エネルギーの基準の位置は力の特徴に応じて決める。

ポテンシャル (potential) の日常用語としての意味は「潜在的な」ということで、保存される物理用語のポテンシャルは, いわば、潜在的に保存されるエネルギーという意味であるとみなしてよいであろう。

2.3.2　保存力と力学的エネルギー保存則

保存力に対して仕事・エネルギー定理を適用する。すなわち、式 (2.1) を (2.18) に代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{x_1}^{x_2} F^{\rm c}(x)dx\\
&= \int_{x_0}^{x_2} F^{\rm c}(x)dx + \int_{x_1}^{x_0} F^{\rm c}(x)dx\\
&= \int_{x_0}^{x_2} F^{\rm c}(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} F^{\rm c}(x)dx\\
&= -[U(x_2) - U(x_1)]\\
\rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) &= \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2). && (2.3)
\end{aligned}
$$

が得られる。運動エネルギー K とポテンシャル U の和を**力学的エネルギー（mechanical energy）**といい、ここでは E と記す。

$$
E \equiv K + U. \quad (2.4)
$$

上の式 (2.3) は運動エネルギー、ポテンシャルのそれぞれは位置 x に依存して（または時間的に）変化するが、**保存力の場合には物体の力学的エネルギーが保存されること, すなわち、力学的エネルギーは変化しないこと**

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \text{constant}, && (2.5)\\
\Delta E = 0 & && (2.6)
\end{aligned}
$$

を意味している。

2.3.3　ポテンシャルによる保存力の計算（1 次元の解析）

ポテンシャル U が位置 x の関数として与えられれば、次のように保存力 F^{c} は計算される。

$$\begin{aligned} -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x}F^{\mathrm{c}}(x')dx'}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x}F^{\mathrm{c}}(x')dx'-\int_{x_0}^{x}F^{\mathrm{c}}(x')dx'}{\Delta x} \\ &= F^{\mathrm{c}}(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

であることより

$$F^{\mathrm{c}}(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{2.8}$$

が得られる。この関係式は「保存力の大きさはポテンシャルの空間的変化率に比例し、その向きはポテンシャルが減少する向きである」ことを意味する。ここで、マイナス符号に注意する。

保存力と力学的エネルギー保存則の実例

1. フックの力（変位に比例する回復力）フック（Robert Hooke) によれば、バネはつりあい位置からの変位（伸びまたは縮み）が小さい限り、変位に比例した、つりあいの位置に戻そうとする力が働く。(フックの力)。つりあいからの変位を x とし、バネ定数を k とすれば、その力 $F(x)$ は $F(x)=-kx$ と表される。この力の行う仕事は最後の位置に依存するが、その経路には依存しない。したがってフックの力は保存力であり、そのポテンシャルは

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x}(-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2,\ (x_0=0) \tag{2.9}$$

となる。この場合も、ある時刻における粒子に速さを v、その位置におけるポテンシャルを $U(x)$ とすれば、運動エネルギーとポテンシャルのそれぞれは位置、時間により変化するが、それらの和としての力学的エネルギーは保存される。すなわち

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 = \text{constant.} \tag{2.10}$$

が成り立つ。

2. 地表付近の 重力

重力加速度の大きさを g として、質量 m の粒子に働く重力の大きさは mg, 向きは鉛直下向きで、一定である。したがって、重力が粒子に対してする仕事は位置のみに依存するので、地表付近の重力は保存力である。鉛直上向きに x 軸を選び、ポテンシャルの基準点を $x_0 = 0$ に選べば、ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x (-mg)dx' \\ &= mgx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。このポテンシャルを位置座標について微分すると

$$-\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d(mgx)}{dx} = -mg \tag{2.12}$$

となり、地表における重力が得られる。また、ある時刻における粒子の速さを v とすると、運動エネルギーとポテンシャルのそれぞれば位置、時間により変化するが、それらの和としての力学的エネルギーは保存される。すなわち

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = \text{constant}. \tag{2.13}$$

3. 一般の重力

重力定数を G とすると、質量 m, M をもつ 2 粒子が距離 x だけ離れている場合、重力の大きさは GMm/x^2 であり、位置に依存して決まり、その行う仕事は位置により定まるので重力は保存力である。そのポテンシャル $U(x)$ は

$$U(x) = -\int_{x_0}^x (-G\frac{mM}{x'^2})dx' = -G\frac{mM}{x} + G\frac{mM}{x_0} \tag{2.14}$$

となる。ここで、重力のポテンシャルの基準点を $x_0 \to \infty$ に選ぶと

$$U(x) = -G\frac{mM}{x} \tag{2.15}$$

となる。(ポテンシャルの値の基準点を原点に選ぶと、そこでポテンシャルは無限大となり、発散するので、不合理と考える。)

この場合も、ある時刻における粒子に速さを v、その位置におけるポテンシャルを $U(x)$ とすれば、運動エネルギーとポテンシャルのそれぞれば位置、時間により変化するが、それらの和としての力学的エネルギーは保存される。

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{x} = \text{constant}. \tag{2.16}$$

(参考)

この結果は式 (2.11) とは一見するとかなり異なる。実は, 式 (2.15) に対して、地球表面付近に限定した近似を行うと次に示すように、式 (2.11) が得られる。

位置 x を、地球半径 R と地表からの高さ h の和と見なす; $x = R+h$ $(|h| << R)$.
次に、x について,R の周りでポテンシャル関数のテーラー展開を行い、第 2 項までで近似する。

$$
\begin{aligned}
U(x) &= -G\frac{mM}{R+h} = -G\frac{mM}{R(1+h/R)} \\
&\approx -G\frac{mM}{R}(1-\frac{h}{R}) = -G\frac{mM}{R} + m(\frac{GM}{R^2})h \\
&= \text{constant} + mgh, (g \approx GM/R^2). \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

4. 複数の保存力が働いている場合
対応して複数のポテンシャルを考える必要がある。例えば、真空中の鉛直方向に置かれたバネには重力とフックの力が働くので、鉛直上向きに x 軸をとり、重力のポテンシャルの原点をばねのつりあいの位置に選ぶ。このとき重力のポテンシャルは $U_{\text{gravitation}} = mgx$ となり、ばねの弾性によるポテンシャルは $U_{\text{elastic}} = kx^2/2$ となる。これらの 2 つの力はともに保存力であるから、力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgx = \text{constant} \qquad (2.18)$$

となる。

2.3.4 ポテンシャルの安定な平衡点のまわりの微小振動 (1 次元)

一直線上に拘束された質量 m の物体が、ポテンシャル $U(x)$ の力（保存力）をうけて運動する場合を考える。ポテンシャル $U(x)$ がある点 $x = x_0$ において極値をとるものとすると、保存力（今、$F(x)$ とする）とそのポテンシャルの関係 $F(x) = -dU(x)/dx$ より、物体がこの点にあるときは、力が働かない。すなわち、物体が初め静止していれば、いつまでも静止を続ける。このような点を平衡点と呼ぶ。平衡点のまわりにポテンシャル関数 $U(x)$ をテーラー展開すると

$$
\begin{aligned}
U(x) &= U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots, \qquad (2.19) \\
U''(x_0) &\equiv \frac{d^2U(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0}. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

を得る。物体が平衡点から少し離れたときの運動を調べるには、式（2.19）の右辺の展開式の第 2 項までを考えれば十分である。今、新たに変数を $x - x_0 \equiv y$ と置き換えて、$U(x) - U(x_0) \equiv V(y)$ で定義される $V(y)$ をあらためてポテンシャルと考えれば

$$
\begin{aligned}
V(y) &\approx \frac{1}{2}ky^2, \qquad (2.21) \\
k &\equiv U''(x_0) \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

を得る。したがって、運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} \quad = \quad -ky \tag{2.23}$$

となる。これは定数 k の符号によって次の 3 つの場合に分けられる。

1. $k > 0$ の場合:
   このときはポテンシャルが下に凸の曲線となるので、物体が平衡点から離れても平衡点中心として、微小振動をするだけであるから、この平衡点は安定である。この微小振動の角振動数 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{U''(x_0)/m}$ である。
2. $k < 0$ の場合:
   このときはポテンシャルが上に凸の曲線となるので、物体が平衡点から離れた物体はますます遠ざかるので、この平衡点は不安定である。
3. $k = 0$ の場合:
   このときには、平衡点が安定か不安定かはテーラー展開のより高次の項を考慮しなければわからない。ポテンシャル $U(x)$ の安定な平衡点 x_0 と不安定な平衡点 x_1 を図 1 に例示する。

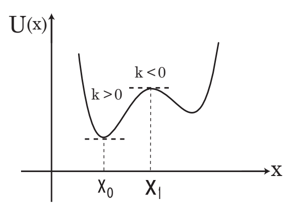

図 1: ポテンシャルの安定な平衡点と不安定な平衡点

2.4　非保存力と力学的エネルギーの散逸 (1 次元)

一般に力は保存力 F^{c} でだけではなく、摩擦力、抵抗力など, それらによりなされる仕事が、物体の最後の位置だけではなく、途中の経路に依存する力、すなわち、非保存力 (non-conservative force)F^{nc} もある。一般の力 F が保存力と非保存力の和 $F = F^{\mathrm{c}} + F^{\mathrm{nc}}$ であるとして、仕事・エネルギー定理を適用し、保存力の線積分とポテンシャルの関係を用いると

$$[\frac{1}{2}mv_2^2] - [\frac{1}{2}mv_1^2] \quad = \quad \int_{x_1}^{x_2} [F^{\mathrm{c}}(x) + F^{\mathrm{nc}}(x)]dx$$

$$\rightarrow [\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2)] - [\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1)] \;\; = \;\; \int_{x_1}^{x_2} F^{\mathrm{nc}}(x)dx \tag{2.24}$$

という関係式が得られる。式（2.24）は力学的エネルギーの変化は非保存力のする仕事に等しいことを意味する。換言すれば、摩擦力などの非保存力は運動の向きと逆向きに働き、それが行う仕事の値はマイナス値になるので、力学的エネルギーが減少する。すなわち、非保存力は力学的エネルギーの散逸をもたらす。

ここで粒子の位置 x における力学的エネルギーを $E(x)$ と置く。

$$E(x) \equiv \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \tag{2.25}$$

式（2.24)、(2.25) より

$$\begin{aligned} \frac{dE(x)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dE}{dx}v \\ &= F^{nc}v. \end{aligned} \tag{2.26}$$

が得られる。この関係式は、力学的エネルギーの時間変化率が非保存力の行う仕事率に等しいことを意味する。

3 運動エネルギーと仕事 (3 次元)

3.1 外力が物体にする仕事と仕事率（3 次元）

3.1.1 外力が一定の場合

以下の説明は 3 次元空間における仕事とエネルギーを考えるが、ベクトルの成分を 2 つに制限すれば 2 次元の場合も同様に議論できる。したがって、特にことわらない限り 3 次元の場合について説明する。

1 次元の場合と同様に、一定の外力 $\vec{F}$ が働いて物体が変位 $\vec{s}$ したときの外力による仕事 W はこれら 2 つのベクトルの内積（スカラー積）で定義される。

$$W \equiv \vec{F}\cdot\vec{s} = Fs\cos\theta,\ F(F=|\vec{F}|, s=|\vec{s}|) \tag{3.1}$$

$$= F_s \cdot s(F_s \equiv F\cos\theta) \tag{3.2}$$

となる。ここで θ はベクトル $\vec{F}$ と $\vec{s}$ のなす角度であり、F_s は外力ベクトルの変位ベクトル方向成分である。すなわち、外力のなす仕事は外力ベクトルの変位ベクトル方向成分と変位の大きさの積であるとも定義される。注意すべきことはベクトルの大きさ F, s のいずれもゼロでなくても、2 つのベクトルが直交していれば、仕事 W はゼロになる ことである。

3.1.2 位置とともに変化する外力が物体にする仕事 (3 次元の解析）

力が物体の位置に依存する場合には、位置ベクトル $\vec{s}_1$ から $\vec{s}_2$ まで、外力が物体にする仕事は外力ベクトル $\vec{F}=(F_x, F_y, F_z)$ と微小変位ベクトル $d\vec{s}$ の内積の積分で表される。微小変位ベクト $d\vec{s}$ はデカルト座標系においては、位置ベクトルの変化、$\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$ と同じである。ある位置 $\vec{r}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ から別の位置 $\vec{r}_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ までの仕事 W_{12} は、一般的におよびデカルト座標系のそれぞれにおいて以下のように表される。

$$W_{12} \equiv \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}, \tag{3.3}$$

$$W_{12} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{3.4}$$

$$= \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} [F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz] \tag{3.5}$$

と表される。一般の場合の、変位ベクトル、および微小変位ベクトルは具体的に与えられる外力と経路の特徴により異なる。デカルト座標系の場合、外力の $x, y,$ z 成分のそれぞれが、位置座標 (x, y, z) の関数であること に注意する。

単位時間あたりの仕事としての仕事率は

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \quad \vec{F}\cdot\vec{v}. \tag{3.6}$$

と定義される。

3.2 仕事・エネルギー定理と運動エネルギー (3 次元の解析)

ある時刻 t において質量 m の質点の速度が $\vec{v}$ のときに外力 $\vec{F}$ が働いているとすると,1 次元の場合と同様に、仕事・エネルギー定理と運動エネルギー

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F} \\ \rightarrow m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}\cdot\vec{v} \\ \frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \end{aligned} \tag{3.7}$$

が導かれる。この運動エネルギー K は 3 次元における速さ v を用いて

$$K=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2) \tag{3.8}$$

と定義される。

3.3 保存力,ポテンシャルと力学的エネルギー保存則 (3 次元の解析)

力のする仕事は一般には、位置だけではなく速度にも依存する。したがって、ある質点をある点 $\vec{r}_1$ から $\vec{r}_2$ まで動かす場合、この力のする仕事 W_{12} は一般には経路だけではなく動かすときの速度にも関係する。しかし、位置だけで決まる力が、さらに 位置の関数として特殊な条件を満足しているならば、仕事が始点 $\vec{r}_1$ と終点 $\vec{r}_2$ だけで決まり、経路には無関係になる。このような力を保存力と呼び、ここでは $\vec{F}^c$ と記す。この定義は次の式で表される。すなわち任意の経路 $\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2$ について

$$\int_{\vec{r}_1:\mathrm{C}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1:\mathrm{C}_2}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}. \tag{3.9}$$

このような保存力の場合には、ひとつの点 $\vec{r}_0$ を基準点として定めておけば、$\vec{r}_0$ より任意の位置 $\vec{r}$ まで質点を動かすときの仕事は位置 $\vec{r}$ だけの関数として定めまるので、この関数を $-U(\vec{r})$ または $-U(x,y,z)$ と書くと

$$U(\vec{r})(=U(x,y,z))\equiv-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}^c\cdot d\vec{r} \tag{3.10}$$

と表される。

仕事が経路にも依存する例

簡単のために、2 次元系において、次のように与えられる外力 $\vec{F}$ と, 原点 (0,0) から点 (ℓ, ℓ) まで二つの異なる経路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ を考える。

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = (by, cx), (b, c : \text{一定}), \tag{3.11}$$

$$\mathrm{C}_1 : (0,0) \to (\ell, 0) \to (\ell, \ell) \tag{3.12}$$

$$\mathrm{C}_2 : y = x \text{ という直線経路に沿って } (0,0) \to (\ell, 0) \to (\ell, \ell) \tag{3.13}$$

同じ力が二つの経路にそって行う仕事 $W(\mathrm{C}_1), W(\mathrm{C}_2)$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned} W(\mathrm{C}_1) &= \int_0^\ell F_x dx + \int_0^\ell F_y dy = \int_{0(y=0)}^\ell by dx + \int_{0(x=\ell)}^\ell cx dy \\ &= c\ell^2, \qquad (3.14) \\ W(\mathrm{C}_2) &= \int_0^\ell F_x dx + \int_0^\ell F_y dy = b\int_0^\ell x dx + c\int_0^\ell y dy \ (x = y, dx = dy) \\ &= \frac{1}{2}(b+c)\ell^2. \qquad (3.15) \end{aligned}$$

このように、$b = c$ である場合を除いて、同じ力のする仕事であっても経路によって異なる。

保存力の例：中心力のポテンシャル

力の中で、その作用する方向が作用線と同じである場合にその力を中心力 (central force) という。中心力の例としては重力、電気力がある。中心力はベクトルであり、数学的には次のように表される。

$$\vec{F}_{\mathrm{central}}(\vec{r}) = f(r)\vec{r} \tag{3.16}$$

ここで、$f(r)$ は 2 粒子間の距離の関数である。中心力の定義より、その行う仕事は位置により定まり、かつ相互を結ぶ位置ベクトル $\vec{r}$ に直交する向きには仕事をしない。したがって、中心力は保存力である。（より厳密な議論は、後述のように、保存力である条件（3 次元の解析）において行う。）

実例として、質量 m, M をもつ 2 粒子間の重力を考える。

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \tag{3.17}$$

G は重力定数である。基準点（無限遠方！）からある点 $(\vec{r})$ まで中心力のする仕事を計算することにより、そのポテンシャルを求める。

$$U(r) = -\int_\infty^{\vec{r}} (-)G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \cdot d\vec{r}. \tag{3.18}$$

ここで、$\vec{r}$ の方向の単位ベクトル $\vec{e_r}$ を用いると

$$\vec{r} \;=\; r\vec{e_r} \tag{3.19}$$

となる。位置ベクトルの変化 $d\vec{r}$ は一般に $\vec{r}$ の方向の成分 dr と $\vec{r}$ に垂直な方向の成分 (今、$(dr)_\perp$ と記す) に分けることができる。ここで $\vec{r}$ に垂直な方向の単位ベクトル $\vec{e_\perp}$ を用いると

$$\vec{e_r} \cdot \vec{e_r} \;=\; 1,\ \vec{e_r} \cdot \vec{e_\perp} = 0, \tag{3.20}$$

$$d\vec{r} \;=\; (dr)\vec{e_r} + (dr)_\perp \vec{e_\perp} \tag{3.21}$$

となる。これらの性質より、$\vec{r} \cdot d\vec{r} = dr$ となる。したがって重力ポテンシャル

$$U(r) \;=\; -\int_\infty^{\vec{r}} (-)G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r} \tag{3.22}$$

が得られる。

参考：{非中心力の例}
すなわち、力の作用する向きが作用線上に限らないものとして、二つの小磁石間の力、分子間のファン・デアワールス力（van der Waals force)、核子（陽子、中性子）間に働くテンソル (tensor force) などが知られている。仕事エネルギー定理 (3.7) に保存力に対して適用し、ポテンシャルで表現して、整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \;&=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^{\mathrm{c}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + U(\vec{r}_1) \;&=\; \frac{1}{2}mv_2^2 + U(\vec{r}_2) \end{aligned} \tag{3.23}$$

という力学的エネルギー保存則が導かれる。

3.3.1 ポテンシャルによる保存力の計算（3 次元の解析）

ポテンシャル U が位置 $\vec{r}$ の関数として与えられれば、次のように保存力 $\vec{F}^{\mathrm{c}}$ は計算される。そのために、まず、ポテンシャルの定義式 (3.10) を微小区間に対して具体的に書き直す。

$$\begin{aligned} &U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x,y,z) \\ &\qquad = -\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)} \left[F_x^c \cdot dx + F_y^c \cdot dy + F_z^c \cdot dz\right] \\ &\qquad = -\left[F_x^c \Delta x + F_y^c \Delta y + F_z^c \Delta z\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

次に,ポテンシャルの変化を、関連する類似の項を付加し、減じて、それぞれ x, y, z の変化だけに関係する項の組ごとに並び替えると

$$\Delta U \;=\; U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x,y,z)$$

$$
\begin{aligned}
&= U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) \\
&\quad + U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z+\Delta z) \\
&\quad + U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z). \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

が得られる。

さらに、次の定義式でポテンシャルの偏微分係数を導入する。

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad (3.26)
$$

$$
\lim_{\Delta y \to 0} \frac{U(x, y+\Delta y, z) - U(x, y, z)}{\Delta y} \equiv \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad (3.27)
$$

$$
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta z} \equiv \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (3.28)
$$

偏微分係数とは複数の変数の関数についての微分係数である。例えば、x についての偏部分係数は「他の変数は定数であり、関数があたかも x だけの関数である」と見做して計算される。

式 (3.24)-(3.28) を用いると、保存力とポテンシャルの関係は次のように表現される。

$$
F_x^{\mathrm{c}} = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y^{\mathrm{c}} = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z^{\mathrm{c}} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (3.29)
$$

便利な表現として、しばしば使用されるベクトル微分演算子を導入する。

$$
\nabla = \mathrm{grad}(\equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (3.30)
$$

$$
\vec{F}^{c} = -\nabla U \ (= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}). \qquad (3.31)
$$

この表現が 1 次元の場合の一般化になっていることは理解しやすいであろう。ここで、grad は傾斜、勾配（gradient）を意味する言葉である。ポテンシャルの微小変化 (数学的にいえば、U の全微分）を grad と微小変位ベクトルの内積として表現できる。

$$
\begin{aligned}
dU &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \\
&= (\nabla U) \cdot d\vec{r}. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

ポテンシャル一定（$dU = 0$) の曲面 (2 次元系では曲線) 上の変位 $d\vec{r}$ を考えると

$$
(\nabla U) \cdot d\vec{r} = 0 \qquad (3.33)
$$

となる。すなわち、∇U は等ポテンシャル面 (線）に垂直である。これらの事実より、保存力は等ポテンシャル面 (線）に垂直で、その減少する向きに作用し、その大きさはポテンシャルの空間的変化率に等しいことがわかる。

3.4 保存力であるための条件

３次元の場合、保存力の定義、すなわち、閉じた経路にそってする仕事がゼロであることは

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_1:\mathrm{C}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1:\mathrm{C}_2}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\\ \to\int_{\vec{r}_1:\mathrm{C}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} &+ \int_{\vec{r}_2:\mathrm{C}_2}^{\vec{r}_1}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=0\\ \to\oint\vec{F}\cdot d\vec{r} &= 0\ (\text{任意の閉じた経路（閉曲線）に対して})\end{aligned}\tag{3.34}$$

と書き表される。ベクトル解析のグリーンの定理(Green's theorem）によれば、任意のベクトル（今、$\vec{F}$ とする）の閉じた経路についての線積分はそのベクトルの回転(rotation)の面積分と等しい。

$$\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{A}.\tag{3.35}$$

ここで、ベクトル $\vec{F}$ の回転(rotation)は次のように定義される。

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &\equiv \mathrm{rot}\vec{F}\\ &\equiv \vec{i}(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})+\vec{j}(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})+\vec{k}(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}).\end{aligned}\tag{3.36}$$

ある力が保存力である条件は、１次元の場合と異なり、３次元の場合にはその力が位置により定まるだけではなく

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)=0,\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)=0,\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=0.\tag{3.37}$$

を満たさねばならない。これらは必要条件で、かつ十分条件でもある。以下、いくつかの実例を示す。

1. <u>中心力は保存力であること</u>
   中心力は $\vec{F}(\vec{r})=f(r)\vec{r}$ のように与えられる。このとき、その回転を計算する。まず中心力ベクトルの回転の x 成分を求めると

$$\begin{aligned}\left[\nabla\times\vec{F}\right]_x &= \frac{\partial(f(r)z)}{\partial y}-\frac{\partial(f(r)y)}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)z-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)y\\ &= \left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)z-\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)y\\ &= \left(\frac{df}{dr}\right)\frac{yz}{r}-\left(\frac{df}{dr}\right)\frac{zy}{r}=0\end{aligned}\tag{3.38}$$

   のように、ゼロとなる。ここで、合成関数の微分公式と偏微分係数

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\frac{1}{2}2y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=\frac{y}{r},\tag{3.39}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \frac{z}{r}\tag{3.40}$$

を用いた。中心力ベクトルの回転の y, z 成分についても同様にして計算すると、それぞれゼロになる。したがって、中心力は保存力であることが示された。

2. 循環的な力は保存力ではないこと
簡単のため、2 次元において、前に紹介した、その仕事が経路に依存する力、$\vec{F} = (F_x, F_y) = (by, cx), (b, c: 一定)$ について上記の条件式を計算してみる。今、力の成分が x, y 成分しかないので、$\nabla \times \vec{F}$ の z 成分だけを計算すると

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{F}\right) &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ &= c - b \end{aligned} \tag{3.41}$$

なる。すなわち、前に議論したように、$c = b$ の場合には保存力であるが、$c \neq b$ の場合には保存力ではない。

3. 参考：電磁気学の例
ファラディの法則 (電磁誘導 (electric induction) の法則) における「起電力」(electro-motive force) $V_{\rm emf}$ のもとになる誘導電場のベクトル $\vec{E}_{\rm ind}$ は、この例と類似の循環的な性質 $(\nabla \times \vec{E}_{\rm ind} \neq 0)$ をもっていて、閉じた経路ではゼロにならない。すなわち「起電力」$V_{\rm emf}$ を生成する！すなわち

$$V_{\rm emf} \equiv \oint \vec{E}_{\rm ind} \cdot d\vec{r} = \iint (\nabla \times \vec{E}_{\rm ind}) \cdot d\vec{A} \tag{3.42}$$

となる。一方、静電ポテンシャル ϕ により決まる静電場ベクトル $\vec{E} = -\nabla\phi$ の回転はゼロである。$(\nabla \times \vec{E} = 0.)$

3.5 非保存力と力学的エネルギーの散逸（3 次元の解析）

一般に力は保存力 $\vec{F}^{\rm c}$ でだけではなく、摩擦力、抵抗力など非保存力 $\vec{F}^{\rm nc}$ もある。一般の力 $\vec{F}$ が保存力 $\vec{F}^{\rm c}$ と非保存力 $\vec{F}^{\rm nc}$ の和であると考えて、すなわち、$\vec{F} = \vec{F}^{\rm c} + \vec{F}^{\rm nc}$ 仕事・エネルギー定理を適用すると

$$[\frac{1}{2}mv_2^2 + U(\vec{r}_2)] - [\frac{1}{2}mv_1^2 + U(\vec{r}_1)] = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^{\rm nc}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \tag{3.43}$$

という関係式が得られる。ここで、式 (3.23) を用いた。この関係式は、力学的エネルギーの変化は非保存力のする仕事に等しいことを意味する。多くの場合、非保存力は、抵抗力がそうであるように、運動の向きと逆向きに作用するので、その行う仕事は負（マイナス）の値となる。すなわち、非保存力が働くときには、力学的エネルギーは保存されず、減少する。その減少したエネルギーは物体の周囲の環境に熱として散逸する。

4　エネルギー形態の相互転換と全エネルギーの量的保存

4.1　外力が複数の物体からなる系に対してする仕事

ここで、粒子状の物体から系 (system) に考察の対象を広げる。ここで、系とは複数の粒子状物体により構成される物体の集まり の意味である。

ここで、仕事の定義を、複数の粒子からなる系に作用する外力の場合に拡張する。すなわち、仕事とは、系に作用する外力により、外から系に、または系から外に移動するエネルギーである。

1. 摩擦がない場合の解析

   外力による仕事が W で、その際の運動エネルギーの変化が ΔK, ポテンシャルの変化が ΔU、力学的エネルギー変化が ΔE である場合

$$W = \Delta K + \Delta U. \tag{4.1}$$

$$= \Delta E \tag{4.2}$$

   という関係がなりたつ。これらの式は、図に示すように、摩擦が含まれない場合、外力が系にする仕事が系の力学的エネルギーの変化と等しいことを示している。

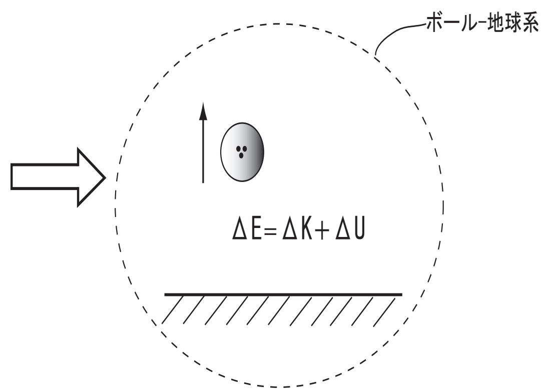

図 2:

2. 摩擦がある場合の解析

   具体的に、水平方向に一定の外力 $\vec{F}$ が x 軸に沿って物体を引っ張っていて、距離 d だけ移動する間に、物体の速度が $\vec{v}_0$ から $\vec{v}$ に増加したとする。運動中に、床から一定の（運動）摩擦力 $\vec{f_k}$ が物体に作用している。

   (a) 運動エネルギーしか変化しない場合

   まず、物体を当面の系とみなして、ニュートンの運動方程式を適用してみる。運動方程式の x 成分は加速度を a として次のように書ける。

$$ma = F - f_k. \tag{4.3}$$

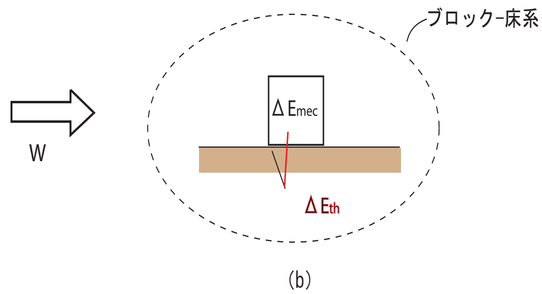

図 3:

今、力は時間的に一定で、加速度 a も一定であり、次の関係式が成り立つ。

$$v^2 = v_0^2 + 2ad. \tag{4.4}$$

この式を a について解き、式 (4.3) に代入して整理すると

$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \tag{4.5}$$

となる。ここで運動エネルギー変化 $\Delta K \equiv mv^2/2 - mv_0^2/2$ を用いると

$$Fd = \Delta K + f_k d \tag{4.6}$$

(b) より一般に、ポテンシャル・エネルギーの変化 ΔU も考えられる場合
式 (4.6) を次のように拡張できる

$$Fd = \Delta E + f_k d, (\Delta E \equiv \Delta K + \Delta U). \tag{4.7}$$

物体が床の上ですべると、物体と床の一部の温度が上昇することことが実験的に確かめられている。物体の温度は、（莫大な個数の原子からなる）物体の熱エネルギー (thermal energy)$E_{\rm th}$, すなわち物体を構成している莫大な個数の原子・分子の不規則な運動によるエネルギー）に関係している。物体と床の熱エネルギーが増加するのは、両者の間に摩擦があり、滑っているからである。（摩擦は 2 つの表面の低温接合である。床の上を物体が滑るにつれて、物体と床の分離と再生成を繰り返し、物体と床を暖め、両者の熱エネルギー ($E_{\rm th}$）を増加させる。実験により、熱エネルギーの増加 $\Delta E_{\rm th}$ は摩擦力 f_k と移動距離 d の積に等しいことが分かっている。すなわち

$$\Delta E_{\rm th} = f_k d \tag{4.8}$$

したがって、式 (4.7) は

$$Fd = \Delta E + \Delta E_{\rm th} \tag{4.9}$$

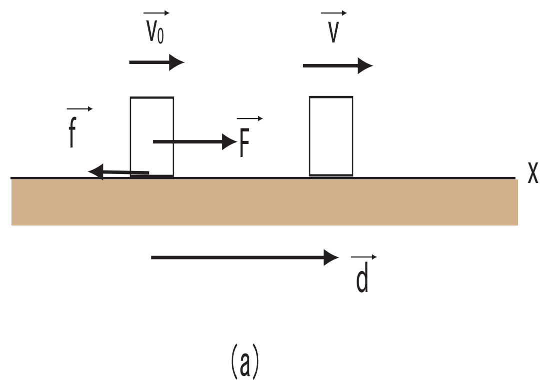

図 4:

と書き直される。ここで、Fdは外力によりなされた仕事W(外力により移動したエネルギー)であるが、どの系に対して仕事がなされたのだろうか(どこでエネルギー移動が起きたのか。)どのエネルギーが変化しているかを再考してみると、物体の力学的エネルギーが変化し、物体と床の熱エネルギーが変化している。したがって、外力$\vec{F}$がした仕事は（物体＋床）系に対してなされたことになる。したがって、構成する物体の間に摩擦のある系への仕事は次のように表される：

$$W \;=\; \Delta E + \Delta E_{\rm th}. \tag{4.10}$$

4.2 全エネルギーの保存則

4.2.1 エネルギー形態の相互転換と全エネルギーの量的保存

これまで議論してきたように、エネルギーは魔術のように、消えたり、現れたりしない。系の全エネルギー$E_{\rm total}$は保存される。ここで、全エネルギーとは、運動エネルギーといポテンシャルエネルギーの和である力学的エネルギー、熱エネルギー、さらに熱エネルギー以外のいろいろな内部エネルギーの総和である。

系の全エネルギー$E_{\rm total}$は系に（または系から）エネルギーが移動した量だけ変化できる。系になされた力学的仕事W、系の全エネルギーの変化$\Delta E_{\rm total}$、系の力学的エネルギーの変化ΔE, 系の熱エネルギー (thermal energy) の変化$\Delta E_{\rm th}$, 系の, それ以外の形の内部エネルギー (internal, intrinsic energy) の変化$\Delta E_{\rm int}$とすると

$$W = \Delta E_{\rm total}(\equiv \Delta E + \Delta E_{\rm th} + \Delta E_{\rm int}) \tag{4.11}$$

が成り立つ。

この全エネルギー保存則は、物理学の基本法則から導き出されたものではない。むしろ、数多くの実験にもとづいた法則である。科学者や技術者は、この法則の例外を見つけたことはない！[1]

4.2.2　孤立系の全エネルギー保存

もし、系が周囲の環境から孤立しているならば、系への（または系からの）エネルギーの移動はない。その場合には、孤立した系の全エネルギーは保存される。

多くの場合、エネルギー移動は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの間、運動エネルギーと熱エネルギーの間のように、（近似的な）孤立系で起こる。しかし、系のすべての形態の全エネルギーの総和は変化しない！

式 (4.11) より、$W = 0$ として、

$$\Delta E + \Delta E_{\rm th} + \Delta E_{\rm int} = 0 \ (\text{孤立系}). \tag{4.12}$$

また、$\Delta E = \Delta E_2 - \Delta E_1$ と書けば、

$$\Delta E_2 = \Delta E_1 - \Delta E_{\rm th} - \Delta E_{\rm int} \ (\text{孤立系}) \tag{4.13}$$

となる。(添え字 1 と 2 は、ある力学的過程の前後の異なる瞬間に対応する) 式 (4.13) の意味は次のことを意味する：孤立系では、ある瞬間の全エネルギーを、途中のエネルギーを考慮せずに、別の瞬間の全エネルギーに関係づけることができる。

4.3　全エネルギーが保存されるなら、エネルギー危機はない？ー「エネルギー」と「利用できるエネルギー」の相違

これまで、エネルギー保存または非保存ということと、その重要性について説明してきた。エネルギー保存といえば、いくらでもほしいだけエネルギーがあるように思われるかもしれない。すなわち、自然はエネルギーを失いもしない、作りもしないと。しかし、例えば、海水のエネルギー、すなわち海の中にある原子の集団が持っている熱エネルギーは実際上何の利用価値もない。このエネルギーを組織立て、向きを揃えて、われわれが利用できる形態にするためには何か温度差を作る必要がある。そうでなければ、エネルギーはあっても利用できない。

エネルギーが存在することと利用できるエネルギーということとは大いに違う。

エネルギーそのもの（energy itself ）とエネルギーの有用度または有効エネルギー (availability of energy) は質的に異なる。

エネルギー保存ということは宇宙のエネルギー総量が一定であることを意味する。　しかし、不規則にふらふらする運動ではエネルギーが拡散してしまい，一方向に移動させることもできない。せっかくのエネルギーを制御できない。エネルギーが存在することと利用できるエネルギーとの概念上の区別の深い意味が（熱の移動が関係する）現実の変化の非可逆性にあることが熱力学を学ぶと明らかになる。

私たちがエネルギーを使う場合、エネルギーの総量は変わらないが、必ずエネルギーの変換、すなわちエネルギーの形態の変化が起こっている。仕事は 100%熱に変わりうるが、熱はある比率でしか仕事に変えることはできない。有効エネル

ギー（エクセルギーともいう）とは、ある環境の中に、環境とは異なる温度、圧力を持つ系 (物体または物体のあつまり）があるとき、その系を環境と同じ温度、圧力にするまでに取り出せる最大の仕事である。

地球におけるエネルギーの供給源はどこに求められるか。それは太陽であり、雨であり、石炭であり、石油であり、天然ガスであり、ウランであり、そして水素である。太陽により、雨が生じ、また石炭も石油も天然ガスも生じる。また、太陽のエネルギー源は核融合反応によるエネルギーである。太陽からは膨大なエネルギーが放出されるが、地球へくるのはその約 20 億分の 1 に過ぎない。自然界の全エネルギーは保存されるが、使用するたびに、質的に劣化するのである。

参考文献

[1] D. ハリディ/R. レスニック/J. ウォーカー：物理学の基礎［1］力学（培風館）,2002 年。特に、7 章、8 章。

[2] R.A. Serway：科学者と技術者のため物理学 Ia[力学、波動]（学術出版社）,1995 年。特に、7 章、8 章。

[3] ファインマン,「物理法則はいかにして発見されたか」、ダイヤモンド社、1968 年、153 ページ以後

[4] ファインマン,「ファインマン物理学 I-力学-」、岩波書店、1968 年、pp.59-60)

[5] 東京大学公開講座「エネルギー」、東京大学出版会、1974 年

[6] 槌田敦「資源物理学入門」、NHKブックス、1986 年、1 章

[7] 押田勇雄「エクセルギーのすすめ」（講談社、ブルーバックス B727,1988 年）