

(油の中を落下する球)

速度に比例する抵抗力が働く運動について次の問に答えよ。

1. この粒子の質量を m 、この抵抗力の比例係数を b 、重力の加速度を g として、運動方程式を書き、初めの速度ゼロとして任意の時刻 t における速度 $v(t)$ を求めよ。
2. 質量 2g の小さな球を油を満たした大きな容器中で静止状態から自由落下させるとき、この球は 5cm/s の終速度に達した。時定数 τ およびこの球がその終速度の 90% に達するのに要する時間 T を計算せよ。ただし、 $g = 9.80\text{m/s}^2$ とする。

(解答例)

1.

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg - bv \\ &= -b(v - \frac{mg}{b}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで関数を置き換えて

$$v - mg/b \equiv V. \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt} \quad (3)$$

となることに注目すると、運動方程式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -bV \\ \rightarrow \frac{dV}{V} &= -\frac{b}{m} dt \\ \rightarrow \log_e |V| &= -\frac{b}{m} t + C \\ \rightarrow V &= c' \exp(-\frac{b}{m} t) \quad (c' \equiv \pm e^C) \\ v(t) &= v_\infty + c' \exp(-\frac{b}{m} t). \quad (v_\infty \equiv \frac{mg}{b}) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、初期条件 $v(t=0) = 0$ 代入して、 $c' = -v_\infty$ となるので

$$v(t) = v_\infty [1 - \exp(-\frac{b}{m} t)]. \quad (5)$$

2.

$$\tau \equiv \frac{m}{b} = \frac{5\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}}{980\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}} = 5.102 \times 10^{-3}\text{s}. \quad (6)$$

$$0.90v_\infty = v_\infty [1 - \exp(-\frac{b}{m} T)] \rightarrow T = \frac{m}{b} \log_e 10 = 0.0117\text{s}. \quad (7)$$