(油の中を落下する球）filename=dropping-oil-qa060511.tex
速度に比例する抵抗力と重力が働く運動について次の問に答えよ。

1. この粒子の質量を m、この抵抗力の比例係数を b、重力の加速度を g として、運動方程式を書き、初めの速度ゼロとして任意の時刻 t における速度 $v(t)$ を求めよ。
2. 前問で求めた解が元の運動方程式を満たすかど うか吟味せよ。
3. 質量 2g の小さな球を油を満たした大きな容器中で静止状態から自由落下させるとき、この球は 5cm/s の終速度に達した。時定数 τ およびこの球がその終速度の 90% に達するのに要する時間 T を計算せよ。ただし、$g = 9.80\mathrm{m/s^2}$ とする。

(解答例)
1.

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg - bv \\ &= -b(v - \frac{mg}{b}) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで関数を置き換えて

$$v(t) - \frac{mg}{b} \equiv V(t). \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt} \tag{3}$$

となることに注目すると、運動方程式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= -bV \to \frac{dV}{V} = -\frac{b}{m}dt \\ &\to \log_e |V| = -\frac{b}{m}t + C \to V = c' \exp(-\frac{b}{m}t)\ (c' \equiv \pm \mathrm{e}^C) \\ v(t) &= v_\infty + c' \exp(-\frac{b}{m}t),\ (v_\infty \equiv \frac{mg}{b}) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$B = \mathrm{e}^A$ のとき、$\log_\mathrm{e} B = A$ となること、および関数記号 $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ を用いた。初期条件 $v(0) = 0$ を使うて、$c' = -v_\infty$ となるので

$$v(t) = v_\infty[1 - \exp(-\frac{b}{m}t)]. \tag{5}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v &= v_\infty \frac{d}{dt}[1 - \exp(-\frac{b}{m}t)] \\ &= v_\infty \frac{b}{m} \exp(-\frac{b}{m}t) \\ &= -\frac{b}{m}(v - v_\infty) \\ \to m\frac{d}{dt}v &= -b(v - \frac{mg}{b}). \end{aligned} \tag{6}$$

3.

$$\tau \equiv \frac{m}{b} = \frac{v_\infty}{g} = \frac{5\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}}{980\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}} = 5.102\times 10^{-3}\text{s}. \tag{7}$$

$$0.90v_\infty = v_\infty[1-\exp(-\frac{b}{m}T)] \rightarrow T = \frac{m}{b}\log_e 10 = 0.0117\text{s}. \tag{8}$$