強制振動ー外力の下の単振動ー　2006．6.20

ばね定数k、質量mの粒子による単振動に粒子のつりあいからの変位xに独立な外力$F(t)$が働く場合、粒子の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F(t) \quad (1)$$

となる。この方程式の一般解を求める。　ここで角振動数ω_0を

$$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m} \qquad (2)$$

と定義すると、運動方程式は次のように書きなおせる。

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = f(t), \quad (f(t)\equiv F(t)/m) \qquad (3)$$

　この式は非同次 2 階微分方程式である。 (3)式の右辺をゼロにした同次方程式(単振動の方程式)の一般解をx_0として、(3)式の特殊解をx_1とする。

これらの関数は、それぞれ、次のように微分方程式を満たす。

$$\ddot{x}_0+\omega_0^2 x_0 = 0 \qquad (4),$$
$$\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1 = f(t) \quad (5)$$

これらの 2 つの微分方程式を両辺を辺々加えると

$$(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+\omega_0^2(x_0+x_1)=f(t) \quad (6)$$

ここで、x_0とx_1の和

$$x = x_0 + x_1 \qquad (7)$$

を（６）式に代入すれば、式（１）を満たすことがわかる。定義により、x_0
は同次微分方程式の一般解であるから、積分定数を 2 つ含んでいることになる。以上のことから、**非同次 2 階微分方程式の一般解は、$x=x_0+x_1$のように、同次方程式(単振動の方程式)の一般解x_0と非同次方程式の特殊解x_1との和で与えられる。**

　まず、同次方程式(単振動の方程式)の一般解x_0は

$$x_0 = A\cos(\omega_0 t+\alpha) \quad (A,\alpha: \text{積分定数}) \qquad (8)$$

である。(3)式の特殊解x_1は外力の関数形が具体的に与えられてときに個別に考えればよい。

ここでは、単振動に典型的な外力として強さが周期的に変化する強制力

$F(t)=mf_0\cos pt,\ (f_0, p:\text{一定})$が働く場合を考える。このとき粒子の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+mf_0\cos pt \qquad (9)$$

となる。この方程式の一般解を求める。この方程式は次のように書きなおせる。

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = f_0\cos pt \qquad (10)$$

この式は非同次 2 階微分方程式である。この一般解 x は、(9)式の右辺をゼロにした同次方程式(単振動の方程式)の一般解（x_0 とする）と(9)式の特殊解（x_1 とする）の和で与えられる。

$$x = x_0 + x_1 \qquad (11)$$

同次方程式の一般解は単振動の式(8)で与えられる。一方、(9)式の特殊解 x_1 は、三角関数の 2 階微分はマイナス符号がついて元の関数に戻るという性質を考えると、次のようにおける。

$$x_1 = B\cos pt \quad (B:\text{定数}) \qquad (12)$$

この式を(9)式に代入すると

$$-p^2B\cos pt+\omega_0^2 B\cos pt = f_0\cos pt \qquad (13)$$

となる。この式が任意の時刻で成立するためには、$B=f_0/(\omega_0^2-p^2)$ でなければならない。

したがって、(9)式の一般解は

$$x = x_0 + x_1 = A\cos(\omega_0 t+\alpha)+\left(\frac{f_0}{\omega_0^2-p^2}\right)\cos pt \qquad (14)$$

となる。ここで、(14)式の最右辺の第二項が表わす運動を強制振動という。

3)＊共振

ここで、外力の振動数 p の値が固有振動数 ω_0 の値に近い場合には、強制振動の「振幅」$f_0/(\omega_0^2-p^2)$ が増大する。しかし、 $p=\omega_0$ の場合には(13)式から定数 B を決めることができない。この場合には元の方程式にもどって考える必要がある。そのため、初期条件として, $x=0, \dot{x}=0$ とする。固有振動の積分定数は次のように決まる。

$$0 = A\cos\beta+\left(\frac{f_0}{\omega_0^2-p^2}\right),\quad 0=-A\omega_0\sin\beta \qquad (15)$$

より

$$A=-\left(\frac{f_0}{\omega_0^2-p^2}\right),\quad \beta=0 \qquad (16)$$

したがって、解は

$$\begin{aligned}x&=\left(\frac{f_0}{\omega_0^2-p^2}\right)(\cos pt-\cos\omega_0 t)\\&=\left(\frac{f_0}{\omega_0^2-p^2}\right)\cdot 2\sin(\frac{\omega_0-p}{2}t)\sin(\frac{\omega_0+p}{2}t)\end{aligned} \qquad (17)$$

となる。ここで、三角関数の公式

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$

から導ける関係式

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$

において、 $\alpha-\beta\equiv A,\alpha+\beta\equiv B$ と置き換えて得られる関係式

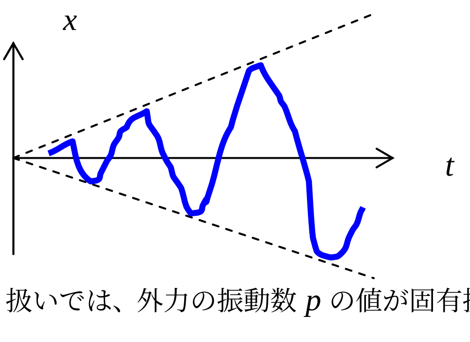
$$\cos A-\cos B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

を用いた。

外力の振動数 p の値が固有振動数 ω_0 の値に近づく極限を考えると

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\omega_0}x&=\lim_{p\to\omega_0}\left(\frac{f_0}{\omega_0+p}\right)\frac{\sin\left(\frac{\omega_0-p}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_0-p}{2}t\right)}\cdot t\cdot\sin\left(\frac{\omega_0+p}{2}t\right)\\&=\left(\frac{f_0}{2\omega_0}\right)t\cdot\sin\omega_0 t\end{aligned} \qquad (18)$$

が得られる。（18）式は外力の強さ f_0 が小さくても、固有振動と強制振動の合成された振動の振幅は時間に比例して限りなく大きくなることを意味している。このような現象を共振（resonance）という。地震の振動数と建物の固有振動数が近い値の場合には倒壊の可能性が高くなるなどの実例がある。



（以上の取り扱いでは、外力の振動数 p の値が固有振動数 ω_0 の値と一致する場合には、振動の

振幅が無限大になるが、振幅が大きくなると、変位に比例するフックの力だけではなく、変位の 2 乗以上に比例する非線形力が働くので、上述の単純な取り扱いは修正が必要である。また現実には抵抗力も働くので、振幅は極大になることはあっても無限大になることはない。）

4)　＊外力への振動系の応答ー強制振動の位相のずれー

外力の振動数 p の値と固有振動数 ω_0 の値の大小関係に依存して、強制振動の「振幅」$f_0/(\omega_0^2 - p^2)$ の符号が変わる。これは振幅の意味をもたせるには不都合である。そこで強制振動の式を振幅 α と位相のずれ δ を用いて次のように書き直してみる。

$$x_1 = \alpha\cos(pt - \delta) = \alpha(\cos pt \cdot \cos\delta + \sin pt \cdot \sin\delta) \quad (19)$$

ここで(14)式と比較すると $\sin\delta = 0$ となるので、次の二つの場合が可能である。

$$\begin{cases} \omega_0 > p \text{ の場合：} \delta = 0, \alpha = \dfrac{f_0}{(\omega_0^2 - p^2)} \\ \omega_0 < p \text{ の場合：} \delta = \pi, \alpha = \dfrac{f_0}{(p^2 - \omega_0^2)} \end{cases} \quad (20)$$

すなわち、いずれの場合にも振幅は

$$\alpha = \left|\frac{f_0}{(\omega_0^2 - p^2)}\right| > 0 \quad (21)$$

と表すことができる。また、外力の振動数 p の値と固有振動数 ω_0 の値の大小関係は位相のずれ δ の値に反映されることになる。