強制振動の一般解　drivenvibration-qa040729

ばね定数 k 、質量 m の粒子による単振動に強制力 $F(t)\equiv mf_0\cos(3\omega_0 t)$ が働く場合、粒子の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+mf_0\cos(3\omega_0 t)\quad(1)$$

となる。この方程式の一般解を求めよ。　定数(角振動数) ω_0 は $\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ と定義される。

[解]

元の方程式は次のように書きなおせる。

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=f_0\cos(3\omega_0 t)\qquad(2)$$

この式は非同次 2 階微分方程式である。この一般解 x は、(2)式の右辺をゼロにした同次方程式(単振動の方程式)の一般解（x_0 とする）と(2)式の特殊解（x_1 とする）の和で与えられる。

$$x=x_0+x_1\qquad(3)$$

なぜならば、

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0+\omega_0^2 x_0=0,\\&\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=f_0\cos(3\omega_0 t),\\&(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+\omega_0^2(x_0+x_1)=f_0\cos(3\omega_0 t)\end{aligned}$$

単振動の方程式の一般解 x_0 は

$$x_0=A\cos(\omega_0 t+\alpha)\quad(A,\alpha:\text{積分定数})\qquad(4)$$

である。(2)式の特殊解 x_1 は、三角関数の 2 階微分はマイナス符号がついて元の関数に戻るという性質を考えると、次のようにおける。

$$x_1=B\cos(3\omega_0 t)\quad(B:\text{定数})\qquad(5)$$

この式を(2)式に代入すると

$$-9\omega_0^2 B\cos(3\omega_0 t)+\omega_0^2 B\cos(3\omega_0 t)=f_0\cos(3\omega_0 t)\qquad(6)$$

となる。この式が任意の時刻で成立するためには、$B=-f_0/(8\omega_0^2)$ でなければならない。

したがって、(2)式の一般解は

$$x=x_0+x_1=A\cos(\omega_0 t+\alpha)-\frac{f_0}{8\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t)\qquad(7)$$

となる。