

一直線上を速度 v_1 で運動している質量 m の粒子が、同じ直線上を速度 v_2 で運動している、同じ質量 m の粒子に衝突する。このとき、外力が働かないとする。運動エネルギーの和が保存される(弾性衝突)とすれば、衝突後の両粒子の速度はいくらか。ただし、衝突により粒子の質量は変化しないとする。

(解答例) 衝突後の両粒子の速度をそれぞれ v'_1, v'_2 とする。運動量と運動エネルギーが保存されるので、

$$mv_1 + mv_2 = mv'_1 + mv'_2, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad (2)$$

が成り立つ。また、これらの式を変形すると

$$(v_1 - v'_1) = (v'_2 - v_2), \quad (3)$$

$$(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \quad (4)$$

これらより

$$v_1 - v'_1 = v'_2 - v_2 = 0 \quad (5)$$

であるか、(これがゼロでない場合)後の式を前の式で辺々割ると

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \quad (6)$$

となる。式(5)の場合には $v_1 = v'_1, v_2 = v'_2$ であって、衝突前の(または衝突が起こらない)状態をあらわす解であり、今は調べる必要はない。衝突後の速度は式(1)と(6)を連立させて解いて、

$$v'_1 = v_1 - (v_1 - v_2) = v_2, \quad (7)$$

$$v'_2 = v_2 + (v_1 - v_2) = v_1 \quad (8)$$

が得られる。すなわち、質量の等しい粒子間の弾性衝突により、速度(大きさと向き)が相互に入れ替わる!

(参考: 質点という概念は本来、内部構造のない点粒子を意味し、原理的に、弾性的性質は現れないことになる。そこで、本問題では質点という用語ではなく、内部構造が存在することを示唆する小物体として、粒子という用語を用いた。)