微分方程式ー超入門ー

微分方程式とは何か：未知の関数の微分係数を含む方程式

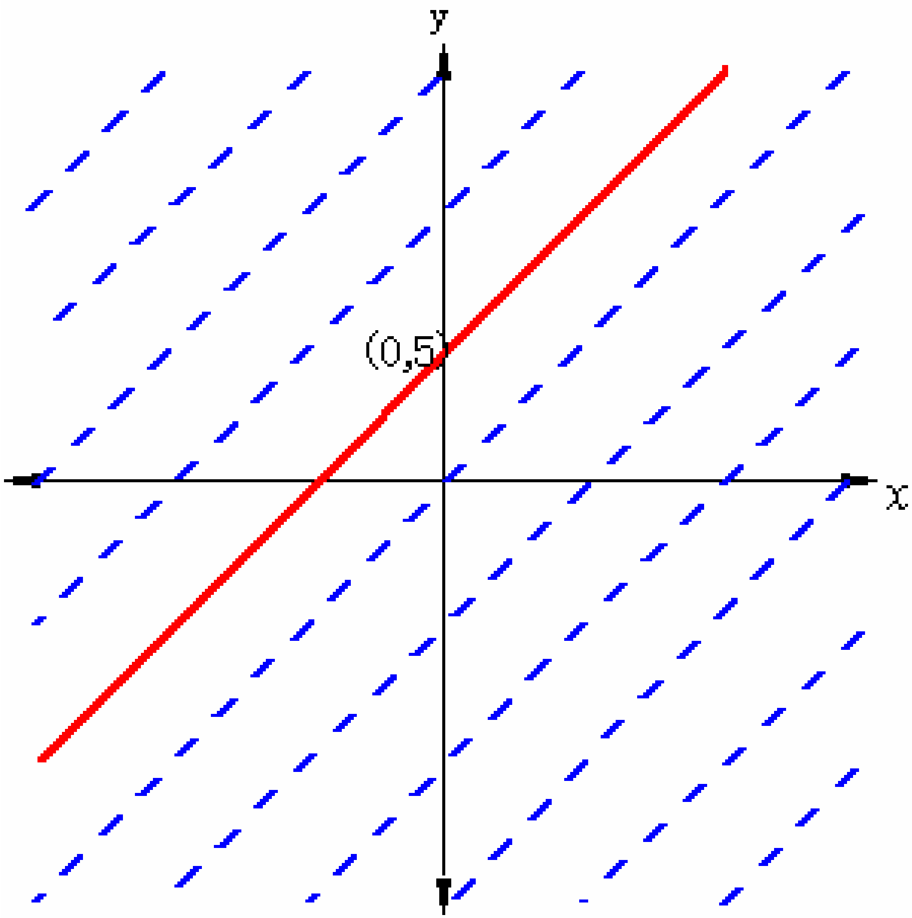
微分方程式の解法=積分すること

微分方程式＝必然性(法則)、可能性の集合

境界条件・初期条件

現実化(現象化)

微分方程式の一般解と特殊解
それらの意味



ある可能性の集合全体を特徴づける関係式としての微分方程式

あらゆる点において
傾き1のグラフを決める
微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=1$$

一般解

$y=x+C$

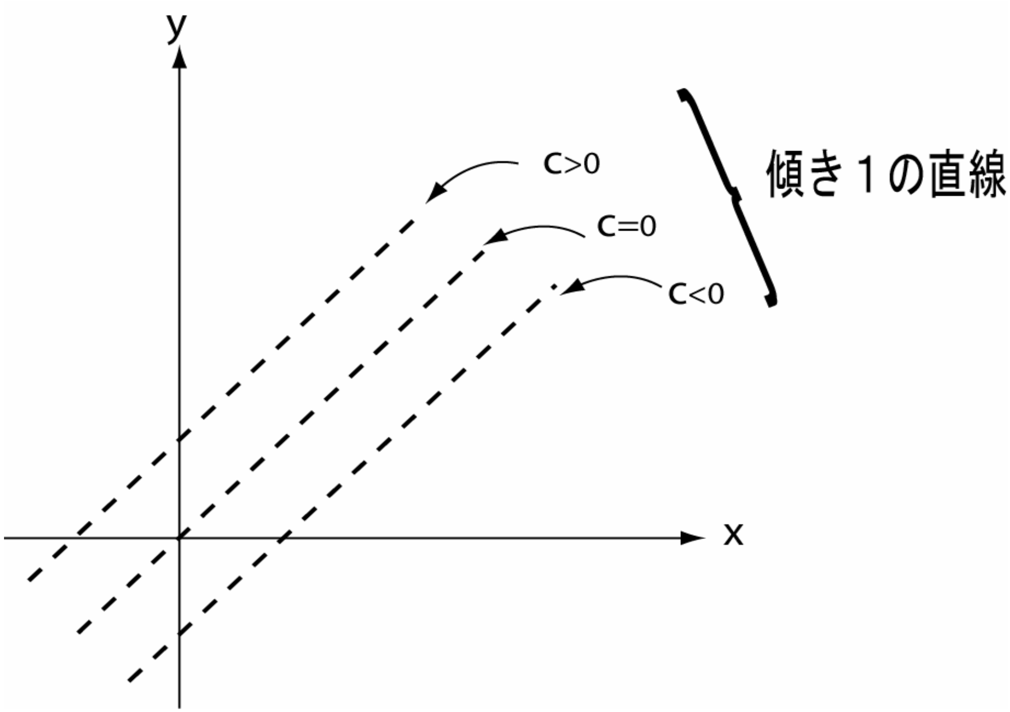
C：積分定数

点(0,5)を通過するという
境界条件を満たす**特殊解**

$y=x+5$

傾き1の直線の集合を表す微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \quad y = x + c \ (c: \text{積分定数})$$

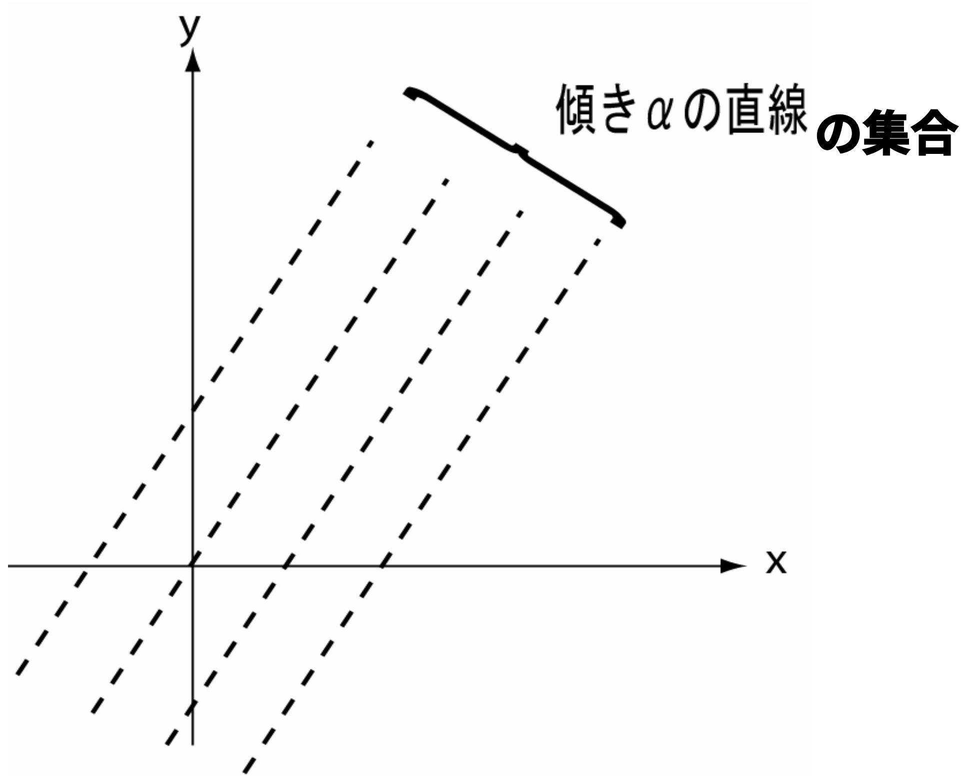


点(2, 0)を通るとき$\Rightarrow 0 = 2 + c \Rightarrow c = -2$

$\Rightarrow y = x - 2$

傾きαをもつ直線の集合を表す微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\,(\text{一定値}) \Leftrightarrow \quad y = \alpha x + c\,(c:\text{積分定数})$$

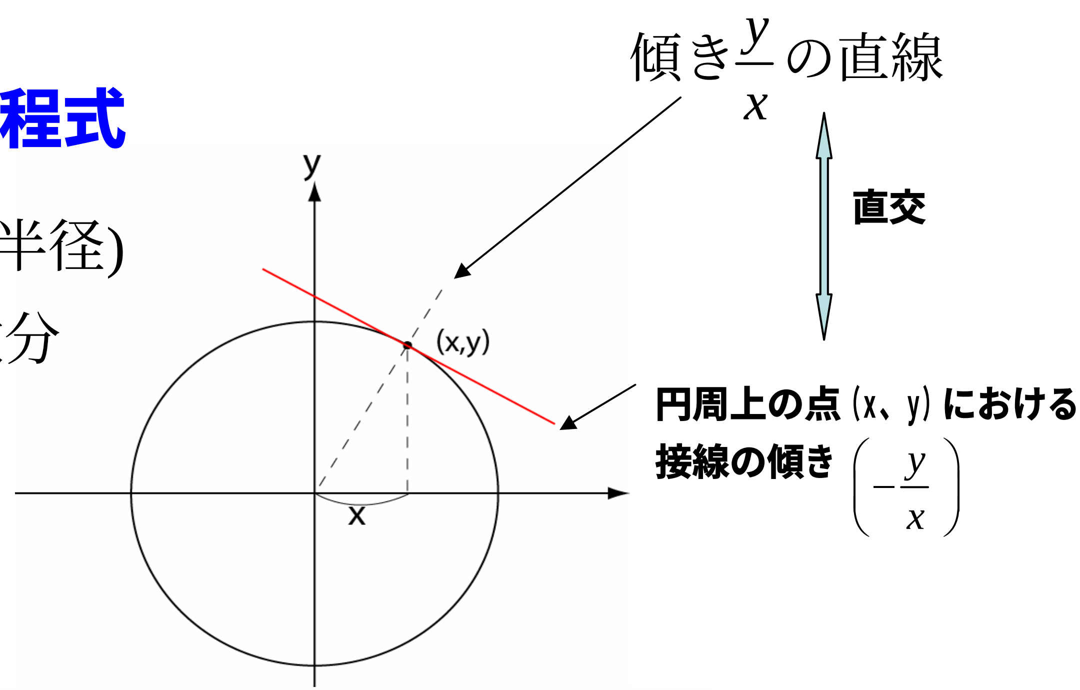


円の集合を表す微分方程式

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r: 一定の半径)$$

$$\Downarrow \qquad x で両辺を微分$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

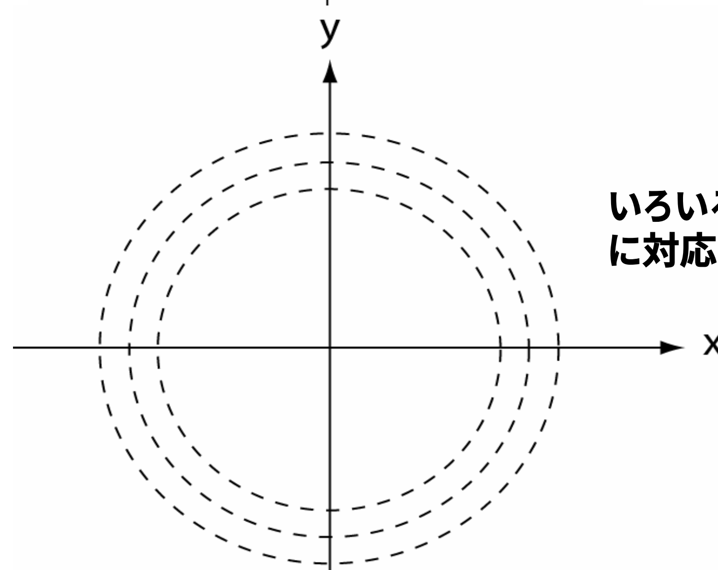


$$\to ydy = -xdx \to xdx + ydy = 0$$

$$\to \int xdx + \int ydy = 一定値 \equiv c^2$$

$$\to \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c^2$$

$$\to x^2 + y^2 = (\sqrt{2}c)^2 = r^2$$



いろいろなcまたはrの値
に対応する同心円の集合

楕円の集合を表す微分方程式は？

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a \neq b: \text{一定})$$

$$\Downarrow \qquad x\text{で両辺を微分}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\times\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

変数分離形の微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$(v(t)$: 未知関数、$k > 0$: 一定）

$$\rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt \rightarrow \int \frac{dv}{v} = (-)\int kdt \text{ (積分は和である！)}$$

$*$

$$\rightarrow \log_e |v| + c_1 = -kt + c_2 \; (c_1, c_2 : \text{積分定数})$$

$$\rightarrow v = \pm e^{c'} \cdot e^{-kt} \rightarrow v = c \cdot e^{-kt} \; (c' \equiv c_2 - c_1, c \equiv \pm e^{c'})$$

一般解

初期条件：$t = 0$のとき$, v \equiv v_0$(一定値)とすると

$$v(t) = v_0 \, e^{-kt}$$ **特殊解**

$*$ **公式**

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C \; (C : \text{積分定数})$$